Занятие №2.
«ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Задачи, для решения которых необходимо составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций, называются **комбинаторными задачами**.

Раздел математики, в котором изучают комбинаторные задачи, называется **комбинаторикой**.

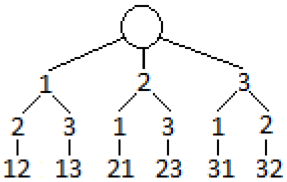
Способ решения задач, основанный на переборе всех возможных комбинаций элементов, называется **перебором возможных вариантов**.

Перебор вариантов, представленный в виде схемы, называется **деревом возможных вариантов**.

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3, если все цифры в числе разные?

Выпишем все возможные пары цифр. Если первая цифра 1, то вторая – или 2, или 3. Получим числа 12, 13. Если первая цифра 2, то вторая – или 1, или 3. Получим числа 21, 23. Если первая цифра 3, то вторая – или 1, или 2. Получим числа 31, 32. Всего 6 чисел.

Построим дерево возможных вариантов.



Правило умножения. Если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то оба элемента a и b в указанном порядке можно выбрать $m \cdot n$ способами. Это правило распространяется на случай трех и более объектов.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

а) Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места в трехзначном числе. После того как первое место занято, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения, имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т.е. искомое количество трехзначных чисел равно 60.

б) Понятно, что если цифры могут повторяться, то трехзначных чисел будет $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Правило сложения. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то любой из указанных объектов a или b можно выбрать $m+n$ способами. Это правило распространяется на случай трех и более объектов.

Пример. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей – $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух девушек или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

Размещениями без повторений из n элементов по m элементов называют любой выбор m элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов. Причем один выбор от другого отличается либо составом элементов, либо порядком их расположения. Обозначаются A_n^m. Вычисляются по формуле $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Заметим, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Пример. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было переводить с любого из 5 языков на любой другой из этих пяти языков?

Так как перевод осуществляется с одного языка на другой, то из 5 языков выбирают по два, причем порядок перевода важен, т.е. словари англо-русский и русско-английский – это разные словари. Значит, всего словарей $A_5^2 = 20$.

Перестановками без повторений из n элементов называют размещения без повторений из n элементов по n, т.е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов. Обозначаются P_n. Вычисляются по формуле $P_n = n!$.

Пример. Сколькими способами могут сесть в легковой автомобиль 5 человек, каждый из которых может быть водителем?

Если не оговорено дополнительно, то считаем, что в машине 5 посадочных мест. Значит, каждый человек может сесть на любое из пяти мест. Это перестановки пяти людей по пяти местам: $P_5 = 5! = 120$.

Сочетаниями без повторений из n элементов по m элементов называют размещения без повторений из n элементов по m, отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом (при этом порядок элементов не важен). Обозначаются C_n^m. Вычисляются по формуле $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$.

Свойства сочетаний.

1. $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$; 2. $C_n^{n-m} = C_n^m$; 3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n$; 4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$; 5. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Пример. Сколькими способами можно выбрать 2 карты из колоды в 36 карт?

В колоде все карты разные и порядок выбора двух карт значений не имеет (сначала туз, потом король или сначала король, потом туз разницы нет). Значит, всего $C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = 630$ выборов.

Теория вероятностей - это наука о закономерностях случайных событий.

Под **событием** в теории вероятностей понимается всякий факт, который может произойти или не произойти при осуществлении определенного комплекса условий. Каждое такое осуществление называется **испытанием, опытом** или **экспериментом**.

События можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет при испытании.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет при испытании.

Случайным называется событие, которое в результате эксперимента может либо произойти, либо не произойти.

Предметом теории вероятностей являются вероятностные закономерности массовых случайных событий, где под массовостью понимается их многократная повторяемость.

Примеры событий:

1. A= {появление герба при бросании монеты};
   B = { появление трех очков при бросании игральной кости};
   C={попадание в цель при выстреле}.
2. Достоверное событие – {при подбрасывании монета упадет};
   Невозможное событие – {при подбрасывании монета повиснет в воздухе};
   Случайное событие – {монета упала гербом вверх}.

Подсчет вероятностей событий сводится к подсчету числа благоприятствующих ему исходов. Такой подсчет осуществляется комбинаторными методами.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это *свойство* состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем - меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Такое определение называют **статистическим определением вероятности**.

Пример. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появлений герба. Результаты нескольких опытов приведены в таблице.

Число бросаний	Число появлений «герба»	Относительная частота
4 040	2 048	0,5069
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0.5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Приняв во внимание, что вероятность появления «герба» при бросании монеты равна 0.5, убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

События называют **несовместными**, если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других.

Пример. Выпадение «орла» при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании «решки», и наоборот.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием.

Пример. При произведении выстрела по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

Назовем каждый из возможных результатов испытания **элементарным событием** или **элементарным исходом**.

Те элементарные исходы, которые интересуют нас при проведении испытания, называются **благоприятными исходами**.

Отношение числа благоприятствующих событию *A* элементарных исходов к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется **вероятностью события** *A*. Обозначается $P(A)$.

Из определения следует, что $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где m – число благоприятствующих событию A элементарных исходов, n – общее число равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Данное определение называют классическим. Из него вытекают некоторые свойства вероятности.

Свойства вероятности.

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число $0<P(A)<1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0\le P(A)\le 1$.

Пример. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Найдем число благоприятных исходов m: это число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся. Оно равно $m=C_6^4=15$. Общее число исходов n – это число способов, которыми можно взять 5 любых шаров из 10 имеющихся: $n=C_{10}^5=252$. Согласно определению, искомая вероятность равна $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{15}{252}\approx 0.06$.

ЗАДАНИЕ

1. Используя цифры 0, 2, 4, 6 составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

2. В соревнованиях по футболу участвовало 12 команд. Каждая команда провела с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника. Сколько всего игр было сыграно?

3. Сколько чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 таких, которые больше 3000?

4. Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7 различных цветов?

5. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?

6. Номер машины в некотором городе состоит из двух различных букв, взятых из набора М, Н, К, Т, С, и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами?

7. В партии из 1000 деталей отдел технического контроля обнаружил 12 нестандартных деталей. Какова относительная частота появления нестандартных деталей?

8. На учениях по стрельбе из винтовки относительная частота поражения цели у некоторого стрелка оказалась равной 0,8. Сколько попаданий в цель можно ожидать от этого стрелка на соревнованиях, если каждый участник произведет по 20 выстрелов?

9. Ученик записал в тетради произвольное двузначное число. Какова вероятность того, что сумма цифр этого числа окажется равной 6?

10. Четыре билета на елку распределили по жребию между 15 мальчиками и 12 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 2 мальчикам и 2 девочкам?