АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Декартова система координат (ДСК) на плоскости

Расстояние $|AB|$ *между двумя точками* $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ (рис.1):

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \;. \tag{1}$$

Деление отрезка в заданном отношении. Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, начиная от точки A (рис. 1), т.е. $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \lambda$, то координаты точки C:

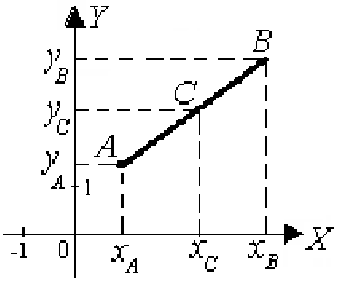


Рис. 1.

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Если точка C *делит отрезок* AB *пополам*, т.е. $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \lambda = 1$, то координаты точки C:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{3}$$

В ДСК уравнение линии имеет вид $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$.

2. Полярная система координат (ПСК)

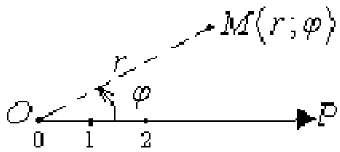


Рис. 2.

Положение точки M в ПСК (рис.2) определяют две координаты: $M\langle r;\varphi\rangle$, где r – *полярный радиус* ($r = |0M|$), $\varphi = \angle POM$ – *полярный угол*.

ОДЗ для полярных координат: $r \ge 0$, $\varphi \in (-\pi;\pi]$ или $\varphi \in [0; 2\pi)$.

Если совместить ПСК и ДСК так, чтобы полюс совпал с началом координат ДСК, а ось OP совпадала с положительной полуосью OX, то получим *формулы связи между декартовыми координатами точки* $M(x; y)$ *и ее полярными координатами* $M\langle r;\varphi\rangle$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{4}$$

Чтобы найти полярный угол φ по известному значению $tg\varphi$, нужно учесть, в какой четверти координатной плоскости находится точка M:

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = arctg\dfrac{y}{x}, \quad \text{если } M \in I \text{ четверти или } M \in IV \text{ четверти;} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \quad \text{если } M \in II \text{ четверти;} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \quad \text{если } M \in III \text{ четверти.} \end{array} \right. \tag{5}$$

В ПСК уравнение линии имеет вид $F(r, \varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$.

3. Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом (рис. 3):

$$y = kx + b. \tag{6}$$

Уравнение вертикальной прямой (рис. 3):

$$x = a. \tag{7}$$

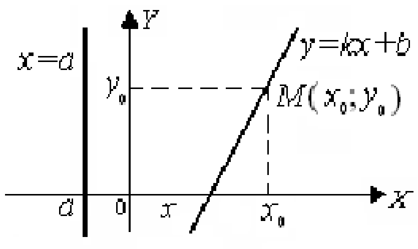


Рис. 3.

Уравнения прямых, проходящих через одну заданную точку $M(x_0; y_0)$ (*уравнение пучка прямых*):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{8}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{9}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{10}$$

Пусть на плоскости заданы две прямые, которым соответствуют уравнения с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

Условие параллельности прямых на плоскости:

$$k_1 = k_2. \tag{11}$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{12}$$

Если одна из двух перпендикулярных прямых вертикальная, т.е. k_2 не существует, то $k_1 = 0$ и обратно: если $k_2 = 0$, то k_1 не существует.

Тангенс острого угла между пересекающимися прямыми можно найти, используя формулу:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \tag{13}$$

откуда $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$. Если одна из прямых вертикальная, т.е. k_2 не существует, то $tg\varphi = \frac{1}{|k_1|}$.

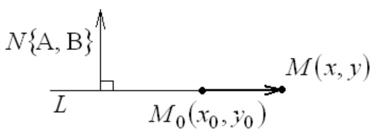
Прямая на плоскости

1. Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат xOy может быть записана в общем виде уравнением:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

2. Рассмотрим прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}\{A, B\}$:

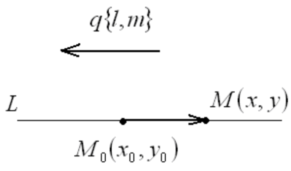


Тогда для любой точки $M(x, y) \in L: \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Любой ненулевой вектор $\vec{N}\{A, B\}$, перпендикулярный прямой $Ax + By + C = 0$, называется **нормальным вектором (нормалью)** этой прямой (коэффициент C вычислить самостоятельно).

3. Рассмотрим прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{q}\{l, m\}$:



Тогда для любой точки $M(x, y) \in L$ векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$ коллинеарны.

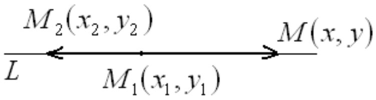
Следовательно, $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{q}$ (координаты векторов пропорциональны),

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой. Любой ненулевой вектор $\vec{q}\{l, m\}$, параллельный прямой $Ax + By + C = 0$, называется **направляющим вектором** этой прямой.

Заметим, что $\vec{N} \perp \vec{q} \Rightarrow Al + Bm = 0$, где $\vec{N}\{A, B\}$, $\vec{q}\{l, m\}$.

4. Рассмотрим прямую L, проходящую через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:



Тогда для любой точки $M(x, y) \in L$ векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарны; $\overrightarrow{M_1M_2}\{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\}$, $\overrightarrow{M_1M}\{(x - x_1), (y - y_1)\}$.

Следовательно,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Это другая форма канонического уравнения прямой.

Замечание. В каноническом уравнении один из знаменателей может быть равен 0. Договоримся, что соответствующий числитель также должен быть равен 0. Это договоренность между математиками.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A(3; -2) и B(3; 5).

$$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y+2}{5+2} \Rightarrow x - 3 = 0 \text{ для любого } y.$$

Таким образом, x-3=0,

x=3, y - любое.

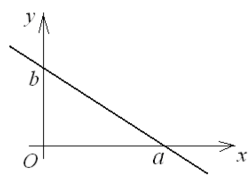
5. $\vec{N}\{A, B\}$ - нормальный вектор прямой $Ax + By + C = 0$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{|\vec{N}|} = \cos\alpha \\ \dfrac{B}{|\vec{N}|} = \cos\beta \end{array}\right\} \text{ - направляющие косинусы нормали } \vec{N}.$$

Тогда уравнение прямой L вида $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ называется нормальным уравнением прямой. Здесь p – расстояние от начала координат до прямой.

6. Пусть прямая L пересекает обе оси координат в указанных точках.

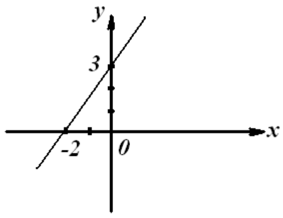
Тогда уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением в отрезках.



Это уравнение удобно для быстрого построения прямой.

Пример 2. Построить прямую, заданную уравнением

$$3x-2y+6=0\,.$$



$$3x-2y+6=0$$

$$3x-2y=-6 \,\Big|\; \div(-6)$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1\,.$$

7. Пусть прямая задана уравнением $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

Обозначим через t общее значение этих дробей.

Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=t\\[2mm] \dfrac{y-y_0}{m}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=lt\\ y-y_0=mt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty\,.$$

Это уравнение называется параметрическим уравнением прямой, где $M_0(x_0,y_0)\in L$, $\vec{q}\{l,m\}$ - направляющий вектор прямой L.

Физический смысл:

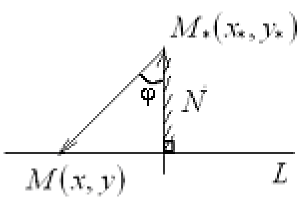
Если параметр t считать за время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\end{cases}\qquad (t\geq 0)$$

определяют закон движения материальной точки по прямой с постоянной скоростью $v=\sqrt{l^2+m^2}$ из начального положения (x_0,y_0).

2. Расстояние от точки до прямой

$L: Ax+By+C=0\rightarrow\vec{N}\{A,\,B\}$, M_* - точка плоскости, не лежащая на L



Тогда $\overrightarrow{M_*M}=\{x-x_*\,;\,y-y_*\}$ и расстояние $\rho(M_*;L)$ от точки M_* до прямой L равно:

$$\rho(M_*;L)=\left|np_{\vec{N}}\,\overrightarrow{M_*M}\right|.$$

$$np_{\vec{N}}\,\overrightarrow{M_*M}=\left|\overrightarrow{M_*M}\right|\cdot\cos\varphi=\left|M_*M\right|\cdot\frac{\overrightarrow{M_*M}\cdot\vec{N}}{\left|\overrightarrow{M_*M}\right|\cdot\left|\vec{N}\right|}=\frac{\overrightarrow{M_*M}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}=\frac{A(x-x_*)+B(y-y_*)}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{Ax-Ax_*+By-By_*}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$= \frac{Ax + By - (Ax_* + By_*)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-(Ax_* + By_*) - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{Ax_* + By_* + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таким образом:

$$\rho_*(M_*; L) = \frac{|Ax_* + By_* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Расстояние от точки $M_*(x_*, y_*)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$.

3.3.Взаимное расположение двух прямых

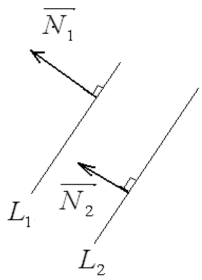
1. Если $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$

$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \overrightarrow{N_1}\{A_1; B_1\}$

$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \overrightarrow{N_2}\{A_2, B_2\}$

$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ коллинеарны ,

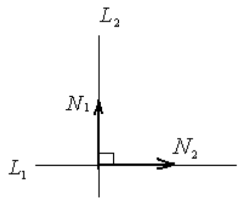
т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.



2. Если

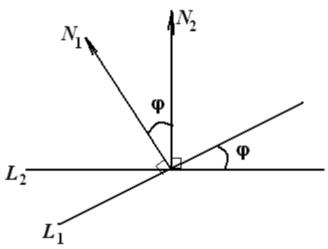
$L_1 \perp L_2 \Rightarrow \overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \Rightarrow \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 0$

, т.е. $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.



1. Угол между двумя прямыми:

$(L_1;^\wedge L_2) = (\overrightarrow{N_1};^\wedge \overrightarrow{N_2}) = \varphi$



$$\cos(L_1;^\wedge L_2) = \cos(\overrightarrow{N_1};^\wedge \overrightarrow{N_2}) = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overline{N}}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overline{N}}$$

$$\cos(L_1;^\wedge L_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение заданной прямой, привести его к общему виду и построить прямую; привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой:

1) прямая L задана точкой $M_0(-1;2)\in L$ и нормальным вектором $\vec{N}\{2;2\}$;

2) прямая L задана точкой $M_0(-1;2)$ и направляющим вектором $\vec{q}=\{3;-1\}$;

3) прямая L задана двумя своими точками $M_1(1;2)$ и $M_2(-1;0)$.

2. Заданы прямая $L:-2x+y-1=0$ и точка $M_0(-1;2)$. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M_0;L)$;

2) написать уравнение прямой L', проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой L;

3) написать уравнение прямой L'', проходящей через точку M_0 параллельно прямой L.

3. Исследовать взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом:

1) найти расстояние между прямыми, если они параллельны;

2) найти точку пересечения и косинус угла между прямыми L_1 и L_2, если они пересекаются:

а) $\begin{array}{l} L_1:-2x+y-1=0 \\ L_2:2y+1=0; \end{array}$ б) $\begin{array}{l} L_1:x+y-1=0 \\ L_2:-2x-2y+1=0. \end{array}$

4. Треугольник ABC задан своими вершинами:

$A(1;2)$; $B(2;-2)$; $C(6;1)$. Требуется:

1) написать уравнение стороны AB;

2) написать уравнение высоты CD и вычислить ее длину;

3) найти угол между высотой CD и медианой BM;

4) написать уравнения биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A.

5. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым L_1 и L_2 и проходящей по середине между ними:

$$L_1:3x-2y-1=0$$
$$L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{3}.$$

6. Написать уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения его сторон $x+y-1=0$ и $y+1=0$, если известно, что диагонали пересекаются в точке $P(-1, 0)$.

7. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек $A(1, 1)$ и $B(3, 0)$.

8. Найти координаты точки, симметричной точке $A(5; 2)$, относительно прямой $4x+2y+1=0$.

9. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1;1)$, $B(2;-1)$, $C(4;0)$.

10. Составить уравнения сторон треугольника, если $A(-5;5)$ и $B(3;1)$ - две его вершины, а $D(2;5)$ - точка пересечения его высот.

11. Дан треугольник с вершинами $A(4;6)$, $B(-3;0)$, $C(2;-3)$. Найти уравнение высоты CE и угол A треугольника.

12. Дан треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A.

13. Даны уравнения сторон треугольника: $5x-4y+15=0$ и $4x+y-9=0$. Его медианы пересекаются в точке $O(0;2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.