АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю (в противном случае Г – прямая, т.е. алгебраическая линия первого порядка).

1. Окружность

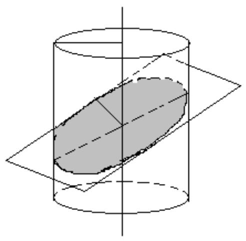
Уравнение

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (1)$$

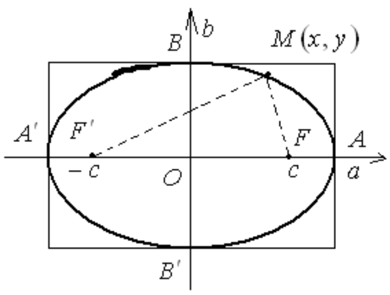
определяет ***окружность*** радиуса R с центром $C(\alpha;\beta)$.

Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то уравнение (1) принимает вид $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Эллипс



Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек той же плоскости постоянна и больше расстояния между этими точками.



Записав это определение в виде уравнения и тождественно его преобразовав, уединяя один из радикалов и возведя в квадрат обе части уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ (3)

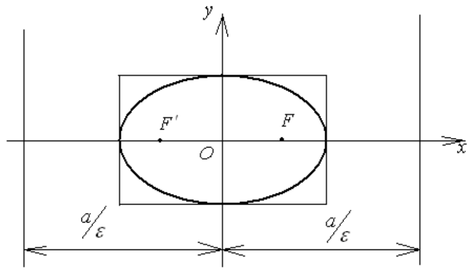
Это уравнение называется *каноническим уравнением эллипса*, где a - большая полуось эллипса; b - малая полуось эллипса; F, F' - фокусы эллипса; A, A', B, B' - вершины эллипса; MF, MF' - фокальные радиусы; FF' - фокусное расстояние.

Отношение $\frac{FF'}{AA'} = \frac{c}{a} = \varepsilon$ называется **эксцентриситетом** эллипса.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \qquad (4)$$

очевидно, что $\varepsilon < 1$ для любого эллипса.

Прямые $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами** эллипса.

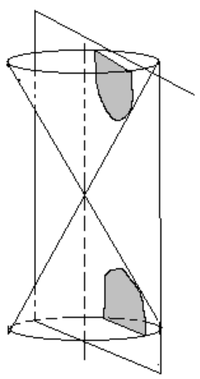


Каждая *директриса обладает* следующими *свойствами*: если r - расстояние от произвольной точки эллипса до некоторого фокуса и d - расстояние от этой же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная и равна эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon. \qquad (5)$$

Замечание. Если $\varepsilon = 0$, т.е. $b = a$, то получаем окружность.

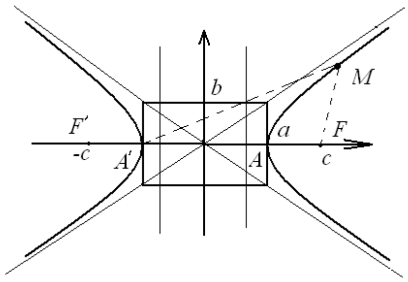
3. Гипербола



Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек плоскости постоянен и меньше расстояния между этими точками.

$|F'M - FM| = 2a$

$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$



После тождественных преобразований получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Это *канонической уравнение гиперболы*, где $b^2 = c^2 - a^2$ (7).

Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) называются **асимптотами** гиперболы:

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x. \qquad (8)$$

Гипербола неограниченно приближается к своим асимптотам.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** гиперболы,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \qquad (9)$$

Очевидно, что для любой гиперболы $\varepsilon > 1$.

Прямые, определяемые уравнениями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$, называются ее **директрисами.**

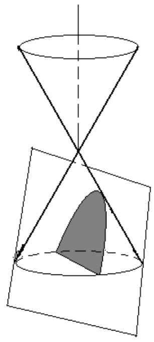
Каждая директриса обладает следующим свойством:

Если r - расстояние от произвольной точки гиперболы до некоторого фокуса, d - расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \qquad (10)$$

есть величина постоянная и равна **эксцентриситету** гиперболы.

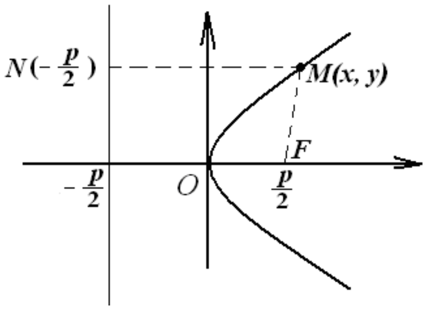
4. Парабола



Параболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых расстояние от заданной точки равно расстоянию до заданной прямой.

$|FM| = |MN|$;

$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$



Возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\underline{y^2 = 2px}. \qquad (10)$$

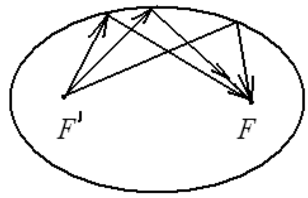
Это есть *каноническое уравнение параболы*.

Расстояние от фокуса до директрисы называется p - **параметром** параболы; (NK) - директриса параболы; $\varepsilon = \frac{MF}{MN} = 1$ - эксцентриситет параболы; т.O - вершина параболы; OX - ось параболы; $F\left(\frac{p}{2};o\right)$ - фокус параболы; FM - фокальный радиус.

5. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

1. Лучи света, исходящие из одного фокуса эллипса после зеркального отражения от кривой, соберутся во втором фокусе эллипса.

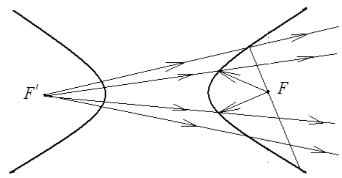
Так же распространяются и акустические волны, что используют архитекторы для создания звуковых эффектов: «говорящих» бюстов,



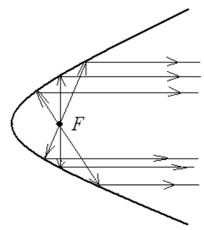
«мистического шепота»,

«потусторонних» звуков.

2. Лучи света, исходящие из одного фокуса гиперболы после зеркального отражения от кривой, кажутся исходящими из другого фокуса.



3. Лучи света, исходящие из фокуса параболы после зеркального отражения от кривой, образуют пучок прямых, параллельных оси параболы.



И наоборот: все световые лучи, идущие параллельно оси параболы, после отражения от «стенок» кривой соберутся в одной точке – фокусе параболы.

Это замечательное оптическое свойство параболы широко применяется в технике, например в устройстве фар, рефлекторов, антенн радиоволн.