Типовой расчет № 2

Азизова Фархунда Зафаровна	Вариант 1
Джумаев Давлат Парвизович	Вариант 2
Негматов Акбар Гафурович	Вариант 3
Ахмадалиев Асаджан	Вариант 4

1. Написать разложение векторов $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Номер варианта	$\vec{x}$	$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{r}$
1	{-2, 4, 7}	{0, 1, 2}	{1, 0, 1}	{-1, 2, 4}
2	{6, 12, -1}	{1, 3, 0}	{2, -1, 1}	{0, -1, 2}
3	{1,- 4, 4}	{2, 1, -1}	{0, 3, 2}	{1,-1, 1}
4	{-9, 5, 5}	{4, 1, 1}	{2, 0, -3}	{-1, 2, 1}

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c_1}$	$\vec{c_2}$
1	{1, -2, 3}	{3, 0, -1}	$2a+4b$	$3b-a$
2	{1, 0, 1}	{-2, 3, 5}	$a+2b$	$3a-b$
3	{-2, 4, 1}	{1, -2, 7}	$5a+3b$	$2a-b$
4	{1, 2, -3}	{2, -1, -1}	$4a+3b$	$8a-b$

3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Номер варианта	A	B	C
1	(1, -2, 3)	(0, -1, 2)	(3, -4, 5)
2	(0, -3, 6)	(-12, -3, -3)	(-9, -3, -6)
3	(3, 3, -1)	(5, 5, -2)	(4, 1, 1)
4	(-1, 2, -3)	(3, 4, -6)	(1, 1, -1)

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$\left(\widehat{p,q}\right)$
1	$p+2q$	$3p-q$	1	2	$\frac{\pi}{6}$
2	$3p+q$	$p-2q$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
3	$p-3q$	$p+2q$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{\pi}{2}$
4	$3p-2q$	$p+5q$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$

5. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	{2, 3, 1}	{-1, 0, -1}	{2, 2, 2}
2	{3, 2, 1}	{2, 3, 4}	{3, 1, -1}
3	{1, 5, 2}	{-1, 1, -1}	{1, 1, 1}
4	{1, -1, -3}	{3, 2, 1}	{2, 3, 4}

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(1, 3, 6)	(2, 2, 1)	(-1, 0, 1)	(-4, 6, -3)
2	(-4, 2, 6)	(2, -3, 0)	(-10, 5, 8)	(-5, 2, -4)
3	(7, 2, 4)	(7, -1, -2)	(3, 3, 1)	(-4, 2, 1)
4	(2, 1, 4)	(-1, 5, -2)	(-7, -3, 2)	(-6, -3, 6)

ПРИМЕР решения типового расчета

1. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Номер варианта	$\vec{x}$	$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{r}$
30	{2, 7, 5}	{1, 0, 1}	{1, -2, 0}	{0, 3, 1}

Решение.

Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ выгладяит следующим образом:

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r} \qquad \textbf{(1)}$$

Через теорию матриц можно записать:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -2\beta + 3\gamma = 7 \\ \alpha + \gamma = 5 \end{cases}$$

Решаем систему, находим α, β, γ и подставляем в формулу (1).

2. Коллинеарны ли векторы $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c_1}$	$\vec{c_2}$
30	{2, 0, -5}	{1, -3, 4}	$2a - 5b$	$5a - 2b$

Решение.

Сначала находим координаты векторов $\vec{c_1}$ и $\vec{c_2}$.

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0+15 \\ -10-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 0+6 \\ -25-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -33 \end{pmatrix}$$

Векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарны, если выполняется условие:

$$\frac{x_{c1}}{x_{c2}} = \frac{y_{c1}}{y_{c2}} = \frac{z_{c1}}{z_{c2}} \qquad \textbf{(2)}$$

В нашем случае это условие не выполняется, значит векторы не коллинеарны

3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Номер варианта	A	B	C
30	(-4, 0, 4)	(-1, 6, 7)	(1, 10, 9)

Решение.

Сначала надо найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A;\ z_B - z_A\ \}$

$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A;\ z_C - z_A\ \}$

Косинус угла между двумя векторами находится по формуле

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{x_{AB} \cdot x_{AC} + y_{AB} \cdot y_{AC} + z_{AB} \cdot z_{AC}}{\sqrt{x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2} \cdot \sqrt{x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2}} \qquad \textbf{(3)}$$

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert p \rvert$	$\lvert q \rvert$	$(\widehat{p,q})$
30	$2p-3q$	$5p+q$	2	3	$\frac{\pi}{2}$

Решение.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен длине векторного произведениия этих векторов.

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \qquad \textbf{(4)}$$

Найдем вектроное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2p-3q)\times(5p+q) = 10p \times p - 15q \times p + 2p \times q - 3q \times q =$$
$$= 15p \times q + 2p \times q = 17p \times q$$

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |17p \times q| = 17|p||q|\sin(p\wedge q) = 17 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 102$$

5. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

Номер варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
30	{-7, 10, -5}	{0, -2, -1}	{-2, 4, -1}

Решение.

Векторы компланарны, если смешанное произведение трех векторов равно нулю:

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
30	(2, -4, -3)	(5, -6, 0)	(-1, 3, -3)	(-10, -8, 7)

Решение.

Сначала надо найти координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1\}$$

Объем тетраэдра равен 1/6 обьема параллелепипеда.

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} V_{парал} = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

$$V_{тетр} = \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = X \cdot i + Y \cdot j + Z \cdot k$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Остается все подставить