Типовой расчет.

Прямая линия на плоскости.

Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется найти:

1) длину стороны AB;

2) уравнение сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;

3) уравнение медиан, проведенных из вершин A и B, и точку пересечения медиан;

4) угол A в радианах с точностью до двух знаков;

5) уравнение высот CT, проведенной из вершины C, и длину этой высоты;

6) координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой CT;

7) уравнение окружности, для которой высота CT является диаметром.

Сделать чертеж.

1. A (-5; 8), B (4; -4), C (10; 13).
2. A (-6; 7), B (3; -5), C (9; 12).
3. A (-3; 10), B (6; -2), C (12; 15).
4. A (-5; 8), B (4; -4), C (10; 13).

Азизова Фархунда Зафаровна	Вариант 1
Джумаев Давлат Парвизович	Вариант 2
Негматов Акбар Гафурович	Вариант 3
Ахмадалиев Асаджан	Вариант 4

Решение типовой задачи

Задача. Даны координаты трех точек $A(-1, 6)$, $B(11, -3))$, $C(9,\ 11)$, являющихся вершинами треугольника.

Найти: 1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;

3) уравнения медиан, проведенных из вершин А и В, и точку пересечения медиан;

4) угол при вершине А в радианах;

5) уравнение высоты СЕ и ее длину;

6) координаты точки М, расположенной симметрично точке А относительно прямой СТ;

7) уравнение окружности, для которой высота СТ является диаметром.

Сделать чертеж.

Решение.

1) Расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Используя эту формулу, находим длину стороны *AB*

$$d = \sqrt{(11+1)^2 + (-3-6)^2} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

Подставляя уравнение (2) координаты трех точек А и В, находим уравнение стороны *AB:*

$$\frac{y-6}{-3-6} = \frac{x+1}{11+1}; \quad \frac{y-6}{-9} = \frac{x+1}{12}.$$

Отсюда

$$\frac{y-6}{-3} = \frac{x+1}{4}$$

или

$$4(y-6) = -3(x+1).$$

После простейших преобразований получаем

$$3x + 4y - 21 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

называется общим уравнением прямой на плоскости. От него нетрудно перейти к уравнению прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b.$$

Разрешим уравнение (3) относительно переменной y, в результате чего получим

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}.$$

Это уравнение стороны AB с угловым коэффициентом $k_{AB} = -\frac{3}{4}.$

Подставляя теперь в (2) координаты точек A и C, получим уравнение стороны AC сначала в общем виде, а затем в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$\frac{x-6}{11-6} = \frac{x+1}{9+1}; \quad \frac{y-6}{5} = \frac{x+1}{10};$$
$$\frac{y-6}{1} = \frac{x+1}{2}; \quad 2(y-6) = x+1;$$
$$2y - x - 13 = 0; \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}.$$

Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{\text{AC}} = \frac{1}{2}.$

3) Пусть точка K – середина стороны BC, тогда координаты точки K находятся по формулам: $K\left(\frac{x_в + x_c}{2}, \frac{y_в + y_c}{2}\right) \Rightarrow K\left(\frac{11+9}{2}, \frac{-3+11}{2}\right) = K(10, 4)$

Уравнение медианы, проведенной из вершины A:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (2)$$

AK: $\frac{y-y_a}{y_k-y_a} = \frac{x-x_a}{x_k-x_a}$

$$\frac{y-6}{4-6} = \frac{x+1}{10+1}$$

$$\frac{y-6}{4-6} = \frac{x+1}{10+1}$$

$$\frac{y-6}{-2} = \frac{x+1}{11}$$

$$11(y-6) = -2(x+1)$$

$$2x + 11y - 64 = 0$$

Пусть точка L – середина стороны AC, тогда координаты точки L находятся по формулам: $L\left(\frac{x_a+x_c}{2}, \frac{y_a+y_c}{2}\right) \Rightarrow L\left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+11}{2}\right) = L\left(4, \frac{17}{2}\right)$

Уравнение медианы, проведенной из вершины B:

BL: $\frac{y-y_b}{y_l-y_b} = \frac{x-x_b}{x_l-x_b}$

$$\frac{y+3}{\frac{17}{2}+3} = \frac{x-11}{4-11}$$

$$\frac{y+3}{\frac{23}{2}} = \frac{x-11}{-7}$$

$$-7\cdot 2(y+3) = 23(x-11)$$

$$23x+14y-211=0$$

Пусть O – точка пересечения медиан. Надо решить систему уравнений:

AK: $2x+11y-64=0$

BL: $23x+14y-211=0$

Тогда решение системы и есть координаты точки O.

4) Если даны две прямые, угловые коэффициенты которых k_1 и k_2, то тангенс угла φ между ними вычисляется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (4)$$

Для, определения угла φ используем угловые коэффициенты прямых AB и AC: $k_1=-\frac{3}{4}; k_2=\frac{1}{2}$. Отсюда по формуле (4):

$$\mathrm{tgA} = \frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2.$$

Теперь найдем сам угол:

$$\mathrm{A} = \mathrm{arctg}2 = 1{,}11 \text{ рад.}$$

5) Высота CE перпендикулярна стороне AB. Известно, что если две прямые взаимно перпендикулярны, то их угловые коэффициенты k_1 и k_2 удовлетворяют условию

$$k_1 k_2 = -1. \qquad (5)$$

Поэтому $k_{CE} \cdot k_{AB} = -1$, откуда

$$k_{CE} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0 y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k, имеет вид

$$y—y_0 = k(x—x_o). \qquad (6)$$

Подставляя в уравнение (6) координаты точки C и значение угловой коэффициент $k = k_{CE} = \frac{4}{3}$, получаем уравнение высоты CE:

$$y - 11 = \frac{4}{3}(x - 9); y - 11 = \frac{4}{3}x - 12;$$

$$y = \frac{4}{3x - 1} \quad \text{или} \quad 4x - 3y - 3 = 0.$$

Для определения длины высоты CE найдем координаты точки E — точки пересечения высоты CE и стороны AB. С этой целью решим систему уравнений, составленную из уравнений прямых CE и AB:

$$\begin{cases} 4x - 3x - 3 = 0, \\ 3x + 4x - 21 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Умножая первое уравнение системы (7) на 4, а второе – на 3 и складывая результаты, получим $25x - 75 = 0$, то есть $x=3$. Теперь нетрудно найти y из любого уравнения системы (7): $y=3$. Таким образом, координаты точки E найдены: (3; 3). Отсюда по формуле (1) вычисляем длину высоты CE:

$$d = \sqrt{(3-9)^2 + (3-11)^2} = 10.$$

Треугольник ABC и высота CE построены в системе координат xOy на рисунке 1.

6) координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой CE;

E – середина AM. Если $A(-1, 6)$ и $E(3,\ 3)$, то

$$x_e = \frac{x_a + x_м}{2}, \;\; y_e = \frac{y_a + y_м}{2}$$

$$x_м = 2x_e - x_a = 2 \cdot 3 - (-1) = 7,$$

$$y_м = 2y_e - y_a = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$M(7,\; 0)$$

7) уравнение окружности, для которой высота *CE* является диаметром. *CE*=10 – диаметр окружности, тогда радиус окружности *R*=5

Пусть *P* – середина *CE* и соответственно центр окружности

Если $C(9,\; 11)$ и $E(3,\; 3)$, то

$$P\left(\frac{x_e + x_c}{2}, \frac{y_e + y_c}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{3+9}{2}, \frac{3+11}{2}\right) = P(6, 7)$$

Уравнение окружности:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = R^2$$

$$(x-6)^2 + (y-7)^2 = 5^2$$

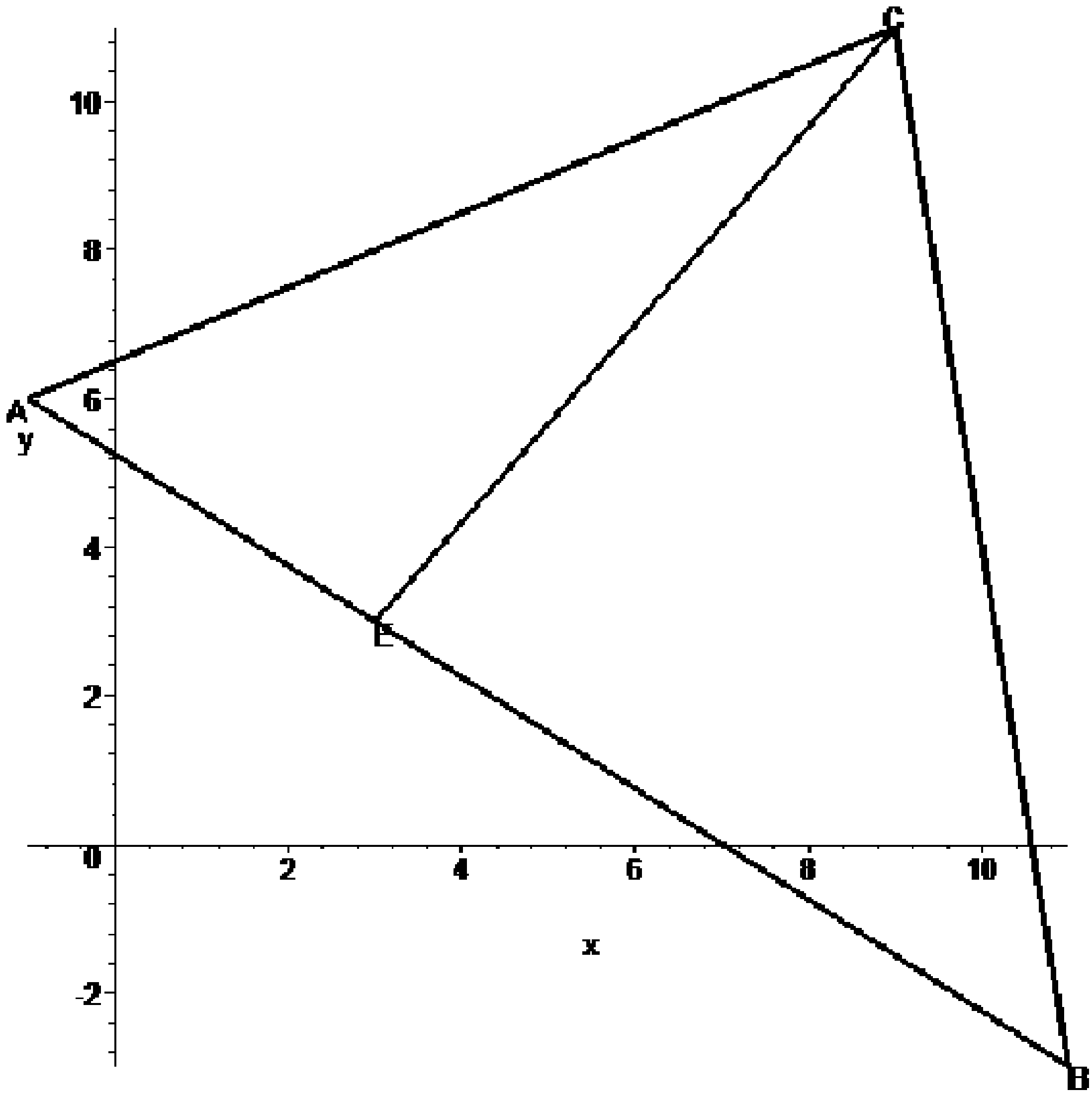

Рисунок 1.