МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова

Л.В. Шабунин

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Конспект лекций

Чебоксары
2003

УДК 519.1
Ш138

Шабунин Л.В. Элементы комбинаторики: Конспект лекций; Чуваш. ун–т. Чебоксары, 2003. 47 с.

Рассмотрены основные темы по комбинаторике, излагаемые в курсе дискретной математики для студентов–математиков: размещения (выборки), перестановки, перестановки с повторениями, сочетания, сочетания с повторениями, биномиальная теорема, биномиальные коэффициенты и их свойства, полиномиальная теорема, формула включения и исключения. Приведены примеры решения задач и доказательства теорем.

Для студентов III курса математического факультета.

Утверждено Методическим советом университета
Отв. редактор: доцент А.А. Стакун

Комбинаторика — это раздел математики, в котором имеют дело с конечными множествами. Типичная задача комбинаторики состоит в подсчете числа различных комбинаций, составленных из элементов конечных множеств по некоторым правилам. Методы, разработанные в комбинаторике, находят применение в теории вероятностей, теории управляющих систем и вычислительных машин и во многих других областях науки и техники.

Рассматриваются следующие темы: размещения (выборки), перестановки, перестановки с повторениями, сочетания, сочетания с повторениями, биномиальная теорема, биномиальные коэффициенты и их свойства, полиномиальная теорема, формула включения и исключения.

§ 1. Правила сложения и умножения

Для решения комбинаторных задач часто применяют *правила (теоремы) сложения и умножения.* Совместное использование этих правил помогает решать довольно сложные задачи.

Число элементов (мощность) конечного множества M обозначим через $|M|$. Множество из n элементов часто называют *n-множеством.* В частности, выражение "r-подмножество A n-множества B" означает, что $A \subseteq B$, $|A| = r$, $|B| = n$. Пустое множество называют при этом *нуль-множеством.*

Следующее правило очевидно.

Правило сложения. *Пусть множества A и B не пересекаются. Тогда*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Другими словами, число элементов в множестве $A \cup B$ равно числу элементов в множестве A плюс число элементов в множестве B.

Из правила сложения получаем

Обобщенное правило сложения. *Если множества* A_1, A_2, $\ldots$, A_n *попарно не пересекаются, то*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

На практике (обобщенное) правило сложения часто применяют в виде разбора случаев. При подсчете числа $N = |A|$ множество A представляют в виде $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, где множества A_1, A_2, $\ldots$, A_n попарно не пересекаются. Далее переходят к рассмотрению взаимно исключающих друг друга случаев A_1, A_2, $\ldots$, A_n, в каждом из которых находят $N_i = |A_i|$, $1 \le i \le n$. Тогда

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n.$$

Пара объектов (элементов некоторых множеств), в которой задан порядок расположения этих объектов, то есть указано, какой объект считается первым, а какой — вторым, называется *упорядоченной парой*. Упорядоченную пару объектов a и b обозначают символом (a, b) или символом $\langle a, b\rangle$. При этом объект a считается первым, а объект b — вторым. Две пары (a, b) и (a^*, b^*) равны, если $a = a^*$ и $b = b^*$. В упорядоченной паре один и тот же объект может одновременно находиться и на первом, и на втором месте. Так, в упорядоченной паре (a, a) объект a встречается дважды. Заметим, что координаты точек на координатной плоскости задаются в виде упорядоченных пар чисел. Например, точка с координатами $(0, 0)$ лежит в центре такой плоскости.

В упорядоченной паре (a, b) элемент a будем называть *первой компонентой (координатой)* этой пары, а элемент b — *второй компонентой (координатой)*.

Правило умножения. *Пусть при составлении упорядоченной пары* (a, b) *первую компоненту* a *можно выбрать* m *способами, а после того, как первая компонента уже выбрана, вторую компоненту* b *можно выбрать* n *способами. Тогда общее число полученных при этом* *различных упорядоченных пар* (a, b) *равно*

$$N = m \cdot n.$$

Доказательство. Для выбора первого элемента у нас есть m возможностей: a_1, a_2, ..., a_m. Если в качестве первого элемента взят элемент a_1, то для выбора второго элемента есть n вариантов: b_1, b_2, ..., b_n. Если в качестве первого элемента взят элемент a_2, то для выбора второго элемента опять есть n вариантов: $_1$, $_2$, ..., $_n$. Заметим, что элементы $_i$, вообще говоря, могут быть никак не связанными с элементами b_j. Если, наконец, в качестве первого элемента взят элемент a_m, то снова имеем n способов выбрать второй элемент: d_1, d_2, ..., d_n. Расположим все упорядоченные пары, которые можно получить заданным способом, в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{llll}
(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots & (a_1, b_n), \\
(a_2, c_1), & (a_2, c_2), & \ldots & (a_2, c_n), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(a_m, d_1), & (a_m, d_2), & \ldots & (a_m, d_n).
\end{array}$$

Легко видеть, что общее количество таких пар равно $m \cdot n$. □

В правиле умножения компонента a выбирается из некоторого множества A, а компонента b выбирается из некоторого, быть может другого, множества B, зависящего, вообще говоря, от выбора первой компоненты.

Применим правило умножения к решению следующей задачи.

1. Пусть даны множества A и B, причем $|A| = m$, $|B| = n$. Сколько различных упорядоченных пар (a, b) можно составить из элементов этих множеств, если $a \in A$, $b \in B$?

Решение. Очевидно, что элемент a можно выбрать m способами из множества A, а после того, как элемент a уже выбран, для выбора элемента b из множества B остается n различных способов. Применяя правило умножения, получаем, что искомое число различных упорядоченных пар (a, b) равно $m \cdot n$. □

Прямым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{\, (a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}.$$

Из решения задачи 1 получаем следующее равенство:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \tag{1.1}$$

Заметим, что равенство (1.1) является частным случаем правила умножения.

Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие *упорядоченного набора из n элементов*. Упорядоченный набор из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $\langle a_1,\ a_2, \ldots, a_n\rangle$. Иногда такой набор будем обозначать символом $a_1 a_2 \ldots a_n$, опуская запятые и скобки (уголки). Два набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ равны, если $a_i = a_i^*$, $1 \le i \le n$. Число n называют *длиной* набора, а элемент a_i — i-й *компонентой* (*координатой*) этого набора. Упорядоченный набор длины n называют еще *n-кой* (*n-выборкой, n-мерным вектором, кортежем длины n*).

Из правила умножения получаем

Обобщенное правило умножения. *Пусть при составлении упорядоченного набора $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ длины k компоненту a_1 можно выбрать n_1 способами, после выбора a_1 компоненту a_2 можно выбрать n_2 способами, после выбора a_1 и a_2 компоненту a_3 можно выбрать n_3 способами, а после выбора $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ компоненту a_i можно выбрать n_i способами, $i \le k$. Тогда общее число получаемых при этом наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ равно*

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

Правило умножения (обобщенное правило умножения) удобно применять, используя язык "*клеток*" ("*посадочных мест*"). Предположим, что

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\text{k}} \\ \hline a_1 & a_2 & \qquad\qquad\ldots\qquad\qquad & a_k \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} \\ \multicolumn{1}{c}{n_1} & \multicolumn{1}{c}{n_2} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{n_k} \end{array},$$

Рис. 1.1

у нас есть k клеток, расположенных в ряд слева направо (рис. 1.1), которые надо заполнить элементами из некоторых множеств. Если первую клетку можно заполнить n_1 способами, после заполнения первой клетки одним из способов вторую клетку можно заполнить n_2 способами, после заполнения клеток 1, 2, $\ldots$, $i-1$ каким-либо образом i-ю клетку можно заполнить n_i способами, $i \leq k$, то общее число заполнений k клеток равно

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

(На рис. 1.1 номер клетки указан над самой клеткой.)

Кроме правил сложения и умножения при решении комбинаторных задач часто используют взаимно однозначное соответствие между множествами.

Два множества A и B называются *эквивалентными*, обозначение $A \sim B$, если одно из них можно взаимно однозначно отобразить на другое. Это означает, что между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Взаимно однозначное соответствие между элементами $x \in A$ и $y \in B$ обозначается $x \leftrightarrow y$. Очевидна следующая равносильность

$$A \sim B \iff |A| = |B|. \tag{1.2}$$

Равносильность (1.2) используется следующим образом. Для того, чтобы найти число элементов в множестве B, подбирают подходящее множество A, которое эквивалентно множеству B и для которого известно $|A|$.

Тогда $|B| = |A|$. Проблема состоит в том, чтобы найти такое множество A и доказать его эквивалентность множеству B.

§ 2. Размещения и перестановки

Для решения комбинаторных задач полезно иметь в запасе несколько уже решенных задач общего характера (вроде задачи 1). К подобным *опорным* задачам можно затем сводить решение конкретной задачи. Приведем несколько таких опорных задач.

Прямым произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ называется множество

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Если все множества A_i совпадают с множеством A, то множество $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ обозначают A^n и называют последнее множество *n-й степенью* множества A. Полагают также $A^1 = A$, $A^0 = \{\emptyset\}$.

1. Доказать равенство

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|. \tag{2.1}$$

Решение. Равенство (2.1) непосредственно следует из обобщенного правила умножения. □

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

2. Найти число всех упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_k)$ длины k, где

1) $a_i \in S$, $1 \leq i \leq k$;

2) a_i может совпадать с a_j при $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$.

Наборы, удовлетворяющие условиям 1) и 2) данной задачи, называются *упорядоченными наборами с повторениями* (*k-выборками с повторениями*).

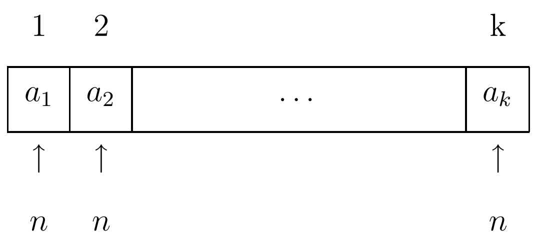


Рис. 2.1

Решение. Используя обобщенное правило умножения и рис. 2.1, легко получаем, что искомое число равно

$$N = n^k. \tag{2.2}$$

Интерпретация рис. 2.1 выглядит следующим образом. Номер клетки указан над самой клеткой. В первую клетку помещается первая компонента набора $(a_1, \dots, a_k)$, во вторую клетку — вторая компонента и т. д. Для заполнения первой клетки имеется n способов, второй клетки — также n способов и т. д. $\square$

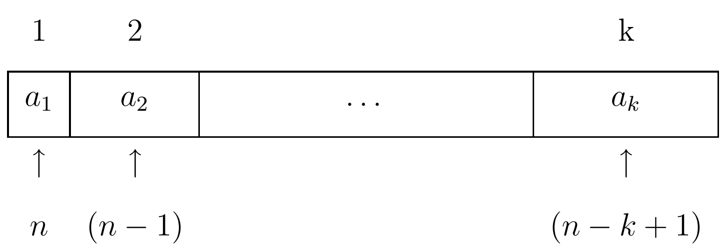
3. Найти число всех упорядоченных наборов $(a_1, \dots, a_k)$ длины k, где

1) $a_i \in S$, $1 \le i \le k$;

2) $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$, $1 \le i, j \le k$.

Наборы, удовлетворяющие условиям 1) и 2) данной задачи, называются *упорядоченными наборами без повторений* (*k-перестановками из n элементов*, *k-выборками без повторений*, *размещениями из n элементов по k*). В k-перестановке $k \le n$; n-перестановки называются *перестановками из n элементов.*

Решение. Используя обобщенное правило умножения и рисунок



,

видим, что искомое число равно

$$N = n(n-1)\dots(n-k+1). \quad \square \tag{2.3}$$

Отметим частный случай задачи 3, когда $k = n$. Тогда формула (2.3) превращается в формулу

$$N = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \tag{2.4}$$

Для произведения первых n натуральных чисел $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ используют специальное обозначение: $n!$ (читается "-факториал"). Формула (2.4) может быть переписана в виде

$$N = n!. \tag{2.5}$$

Число всех размещений из n по k обозначают символом A_n^k, а число всех перестановок из n элементов — символом P_n. Ввиду (2.3) и (2.5), имеем

$$A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1), \tag{2.6}$$

$$P_n = n!. \tag{2.7}$$

Многие комбинаторные задачи формулируются в терминах слов того или иного алфавита.

Алфавит — это конечное множество символов (букв). *Словом в алфавите* A называется конечная последовательность букв из A, выписанных друг за другом. Буквы в слове могут повторяться. Если $x = a_1a_2\dots a_n$ — слово, $a_i \in A$, то число n называется *длиной* слова x и обозначается $|x|$. Удобно считать, что существует ровно одно *пустое слово*, которое совсем не содержит букв. Пустое слово будем обозначать символом ε. Длина пустого слова равна нулю. Множество всех слов в алфавите A, включая пустое слово, обозначается A^*. *Формальным языком* в алфавите A называется всякое подмножество $L \subseteq A^*$.

Очевидно, что между словами в алфавите A и упорядоченными наборами элементов из множества A существует взаимно однозначное соответствие:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \leftrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n$.

Пример 2.1. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены всевозможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

Решение. Каждое четырехзначное число является словом $a_1a_2a_3a_4$ длины 4 в алфавите $\{0, 1, 2, 3\}$, причем $a_1 \neq 0$. Для a_1 имеем три возможности. После того, как a_1 выбрано, для a_2 имеем снова три варианта. После того, как a_1 и a_2 выбраны, для a_3 имеем два варианта. Наконец, после выбора a_1, a_2 и a_3, для a_4 имеем одну возможность.

Используя обобщенное правило умножения и рисунок

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_1} & \multicolumn{1}{c|}{a_2} & \multicolumn{1}{c|}{a_3} & \multicolumn{1}{c|}{a_4} \\ \hline \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array},$$

легко получаем, что искомое количество чисел равно

$$N = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18. \qquad \square$$

Пример 2.2. Сколько существует пятибуквенных слов в языке, алфавит которого состоит из пяти букв: трех гласных $\{,,\}$ и двух согласных $\{,\}$, если грамматикой языка запрещаются две подряд идущие гласные или согласные?

Решение. Для решения этой задачи используем правило умножения в сочетании с правилом сложения. Пусть A_1 — множество всех допустимых пятибуквенных слов $x_1x_2x_3x_4x_5$, которые начинаются с гласной буквы, A_2 — множество всех допустимых пятибуквенных слов $y_1y_2y_3y_4y_5$, которые начинаются с согласной буквы. Ясно, что искомое число слов равно

$$|A_1| + |A_2|.$$

Для подсчета $|A_1|$ используем рисунок

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{x_1} & \boxed{x_2} & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & \boxed{x_5} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{array},$$

из которого по правилу умножения получаем

$$|A_1| = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 108.$$

Для подсчета $|A_2|$ используем рисунок

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{y_1} & \boxed{y_2} & \boxed{y_3} & \boxed{y_4} & \boxed{y_5} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array},$$

из которого по правилу умножения получаем

$$|A_2| = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

Искомое число пятибуквенных слов равно

$$108 + 72 = 180.$$

□

§ 3. Сочетания

Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — множество из n элементов. Обозначим через C_n^k число всех k-подмножеств множества S, то есть число всех подмножеств, имеющих в точности k элементов. Каждое k-подмножество

$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ множества S является *неупорядоченным набором длины k без повторений* и обратно, каждый неупорядоченный набор элементов из S, имеющий длину k и не содержащий повторений, есть некоторое k-подмножество. Неупорядоченные наборы длины k без повторений, составленные из элементов n-множества S, называются *сочетаниями из n элементов по k.*

1. Доказать равенство

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.1}$$

Решение. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — k-подмножество множества S. Существует в точности $k!$ различных перестановок элементов этого подмножества (см. задачу 3):

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, x_2, \ldots, x_k), \\ (x_2, x_1, \ldots, x_k), \\ \ldots \\ (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}). \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

Пусть $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ — другое k-подмножество множества S. Существует также в точности $k!$ различных перестановок элементов этого подмножества:

$$\left.\begin{array}{l} (y_1, y_2, \ldots, y_k), \\ (y_2, y_1, \ldots, y_k), \\ \ldots \\ (y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}). \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Заметим, что все наборы из (3.2), (3.3) попарно различны. Если оба набора из одного блока ((3.2) или (3.3)), то они отличаются друг от друга порядком элементов, а если эти наборы из разных блоков (один из (3.2), другой из (3.3)), то они отличаются хотя бы одним элементом, так как

$$\{x_1, \ldots, x_k\} \neq \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}.$$

Каждому k-элементному подмножеству $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ ставим в соответствие блок из $k!$ перестановок элементов множества $\{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$. Ясно, что при этом каждый упорядоченный набор без повторений (размещение) длины k встретится в одном и только одном блоке и при том ровно один раз. Различных блоков имеется C_n^k, в блоке $k!$ размещений, общее число размещений из n по k равно A_n^k. Отсюда

$$\begin{aligned} C_n^k \cdot k! &= A_n^k, \\ C_n^k &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Равенство (3.1) обычно используют в теоретических выкладках. Для вычисления значения C_n^k удобнее использовать равенство (3.4). Заметим, что число множителей в числителе и знаменателе дроби

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

одно и то же и равно k.

Пример 3.1. Найти C_7^3.

Решение. По формуле (3.4) получаем

$$C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

□

Из формулы (3.1) легко следует формула

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{3.5}$$

Заметим, что (3.5) можно доказать иначе, опираясь на определение числа C_n^k. Действительно, между k-элементными подмножествами множества S и его $(n-k)$-элементными подмножествами существует взаимно однозначное соответствие: каждому k-элементному подмножеству $X \subseteq S$ ставим в соответствие его дополнение

$$\overline{X} = S \backslash X = \{a \in S | a \notin X\}$$

до множества S. Нетрудно убедиться, что соответствие

$$X \leftrightarrow \overline{X}$$

является взаимно однозначным. Следовательно, различных $(n-k)$-подмножеств столько же, сколько различных k-подмножеств. Это и доказывает равенство (3.5).

Отметим равенства

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \tag{3.6}$$

Действительно, имеется ровно одно пустое подмножество в множестве S и ровно одно n-элементное подмножество (само S). В связи с равенствами (3.6) полагают по определению

$$0! = 1.$$

Тем самым формула (3.1) становится верной и при $k = 0, n$.

Множество, состоящее из всех подмножеств множества S, называется *булеаном* множества S и обозначается

$$P(A) = \{X | X \subseteq S\}.$$

Множество $P(S)$ часто обозначают также символом 2^S.

2. Доказать, что

$$|P(S)| = 2^n. \tag{3.7}$$

Решение. В множестве $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ фиксируем порядок элементов. Каждому подмножеству $X \subseteq S$ поставим в соответствие слово $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ в алфавите $\{0, 1\}$ по следующему правилу: на i-м месте в слове w стоит 1, если $s_i \in X$, и 0, если $s_i \notin X$. Нетрудно убедиться, что соответствие

$$X \leftrightarrow w$$

является взаимно однозначным. Следовательно, различных подмножеств X в множестве S столько же, сколько различных слов w длины n в алфавите $\{0, 1\}$. Из рисунка

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \text{n} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{w_1} & \multicolumn{1}{c|}{w_2} & \multicolumn{1}{c|}{\qquad\dots\qquad} & \multicolumn{1}{c|}{w_n} \\ \hline \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 2 & 2 & & 2 \end{array}$$

и правила умножения легко следует, что таких слов w в точности 2^n. Следовательно,

$$|P(S)| = 2^n. \qquad \square$$

Из равенства (3.7) и определения числа C_n^k (как числа всех k-элементных подмножеств n-элементного множества) получаем равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n. \tag{3.8}$$

Пример 3.2. В группе 24 студента. Из них нужно выделить трех делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Различных троек делегатов C_{24}^3. По формуле (3.4) получаем

$$\begin{aligned} C_{24}^3 &= \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 23 \cdot 22 = \\ &= 23 \cdot 88 = 2024. \end{aligned} \qquad \square$$

§ 4. Перестановки с повторениями

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ элементов множества A, в котором a_1 встречается n_1 раз, a_2 — n_2 раза, $\ldots$, a_k — n_k раз, называется *перестановкой с повторениями* состава $(n_1, \ldots, n_k)$ из элементов $(a_1, \ldots, a_k)$.

1. Найти число $P(n_1, \ldots, n_k)$ всех перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, \ldots, n_k)$.

Решение. Имеем

$$n = n_1 + \ldots + n_k.$$

Нарисуем n клеток

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & \text{n} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{\quad\quad\ldots\quad\quad} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array} \tag{4.1}$$

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. В клетки с номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_{n_1} поместим элемент a_1. Число способов выбрать подмножество

$$I_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}$$

равно $C_n^{n_1}$. После этого в клетки с номерами j_1, j_2, $\ldots$, $j_{n_2} \in I \backslash I_1$ поместим элемент a_2. Число способов выбрать подмножество

$$I_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\}$$

равно $C_{n-n_1}^{n_2}$. Действуя подобным образом, разместим все элементы a_1, $\ldots$, a_k по клеткам (4.1). При этом элемент a_k будет помещен в клетки с номерами

$$t_1, \ldots, t_{n_k} \in I \backslash (I_1 \cup \ldots \cup I_{k-1}).$$

Число способов выбрать подмножество

$$I_k = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n_k}\}$$

равно $C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$. По правилу умножения число способов заполнить таким образом клетки (4.1) равно

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{n!(n-n_1)! \ldots (n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)! \ldots n_k!(n-n_1-\ldots-n_k)!} =$$
$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_k! 0!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

Следовательно,

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}. \qquad \square$$

Пример 4.1. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове “математика”?

Решение. Здесь $A = \{\text{а}, \text{е}, \text{и}, \text{к}, \text{м}, \text{т}\}$. Слово “математика” является упорядоченным набором длины 10 с повторениями, имеющим состав (3,1,1,1,2,2) (буква “а” входит три раза, буквы “е”, “и”, “к” — по одному разу, буквы “м”, “т” — по два раза). Различных перестановок с таким составом имеется

$$P(3,1,1,1,2,2) = \frac{10!}{3!1!1!1!2!2!} = 151200.$$

Следовательно, при перестановках букв получится 151200 различных слов. □

§ 5. Сочетания с повторениями

1. Найти число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{5.1}$$

в целых неотрицательных числах.

Решение. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольное решение уравнения (5.1). Поставим в соответствие этому решению слово w длины $n + k - 1$ в алфавите $\{|, +\}$ по следующему правилу:

$$w = \underbrace{|\ldots|}_{a_1} + \underbrace{|\ldots|}_{a_2} + \ldots + \underbrace{|\ldots|}_{a_n}.$$

Легко видеть, что отображение $a \mapsto w$ является взаимно однозначным отображением множества всех решений уравнения (5.1) на множество W всех слов в алфавите $\{|, +\}$, имеющих длину $n + k - 1$ и содержащих ровно $n - 1$ символов “+” (и, следовательно, k палочек “|”). Количество таких слов можно подсчитать следующим образом. Нарисуем $n + k - 1$ клеток

1	2				$n+k-1$
		$\dots$	$\dots$	$\dots$	

.

Выберем $n-1$ клетку и поместим в них символ "+". В остальные клетки поместим символ "|". В результате получим слово из W. Очевидно, что так можно получить все слова множества W. Выбор $(n-1)$-й клетки равносилен указанию подмножества $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}\}$ множества $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$. Различных таких подмножеств C_{n+k-1}^{n-1}. Следовательно,

$$|W| = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}.$$

Поэтому число решений уравнения (5.1) в целых неотрицательных числах равно

$$C_{n+k-1}^{k}. \qquad \square$$

Пусть $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ — множество из n элементов, a_1, a_2, $\dots$, a_k — произвольные элементы из S (быть может, повторяющиеся). Обозначим через $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ *неупорядоченный набор длины k с повторениями*. Это означает, что порядок элементов в таком наборе несущественнен, а сам набор может содержать повторяющиеся элементы. Два подобных набора считаются равными, если они имеют одинаковый состав и число вхождений каждого элемента в один набор совпадает с числом вхождений этого элемента в другой набор. Вместо $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ иногда пишем просто $a_1 a_2 \dots a_k$. Неупорядоченные наборы длины k с повторениями, составленные из элементов n-множества S, называются *сочетаниями с повторениями из n элементов по k*, *неупорядоченными выборками с повторениями объема k*. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначим через $\overline{C}_n^k$.

Пример 5.1. Пусть $S = \{a, b, c, d, e\}$, $k = 3$. Тогда

$$[a, b, b] = [b, a, b] = abb = bab = bba,$$

$$bbd = bdb = dbb.$$

2. Доказать равенство

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{5.2}$$

Решение. В множестве $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ фиксируем порядок элементов. Каждое сочетание с повторениями $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ из элементов множества S вполне задается вектором $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, где l_i — число вхождений элемента s_i в данное сочетание $(1 \le i \le n)$. Очевидно, что вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ является решением уравнения (5.1) в целых неотрицательных числах. Также ясно, что отображение

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] \mapsto (l_1, l_2, \ldots, l_n)$$

является взаимно однозначным отображением множества всех сочетаний с повторениями из n элементов по k на множество всех решений в целых неотрицательных числах уравнения (5.1). Отсюда и решения задачи 1 следует справедливость равенства (5.2). □

Пример 5.2. Пусть $S = \{a, b, c, d, e\}$. Найти число всех неупорядоченных выборок с повторениями объема 3. Выписать все такие выборки.

Решение. Число выборок равно

$$\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

Все выборки приведены в таблице

aaa	aab	aac	aad	aae	abb	abc
abd	abe	acc	acd	ace	add	ade
aee	bbb	bbc	bbd	bbe	bcc	bcd
bce	bdd	bde	bee	ccc	ccd	cce
cdd	cde	cee	ddd	dde	dee	eee .

□

§ 6. Биномиальная теорема

Теорема 6.1 (биномиальная теорема).

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n. \quad (6.1)$$

Доказательство. В равенстве

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n}$$

перенумеруем множители справа числами от 1 до n. Получим

$$(x+y)_1 (x+y)_2 \ldots (x+y)_n. \quad (6.2)$$

Если теперь в (6.2) раскрыть скобки, то одночлен $x^{n-k}y^k$ получается в тех и только тех случаях, когда в каких-либо $(n-k)$ множителях $(x+y)_i$ выбирается слагаемое x, а в остальных k множителях $(x+y)_j$ — слагаемое y. Другими словами, чтобы получить одночлен $x^{n-k}y^k$, надо выбрать $(n-k)$-элементное подмножество в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть это будет подмножество

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}. \quad (6.3)$$

Затем из множителей вида $(x+y)_i$ с номерами $i = i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n-k}$ надо взять слагаемое x, из остальных множителей $(x+y)_j$ — слагаемое y, и перемножить эти слагаемые. Получим одночлен $x^{n-k}y^k$. Различных способов получить такой одночлен столько же, сколько существует различных $(n-k)$-подмножеств (6.3). Их существует в точности C_n^{n-k}, что равно, согласно равенству (3.5), C_n^k. Таким образом,

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n. \qquad \square$$

Замечание. Биномиальную теорему часто доказывают методом математической индукции.

Формулу (6.1) называют *формулой Ньютона*, а ее правую часть — *разложением степени бинома*. Разложение (6.1) для целых положительных

n было известно и до Ньютона. Ньютон распространил разложение (6.1) на случай n отрицательного и дробного.

Коэффициенты C_n^k формулы Ньютона называются *биномиальными коэффициентами*. Правую часть равенства (6.1) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k,$$

т. к. $C_n^0 = C_n^n = 1$. Биномиальный коэффициент C_n^k иногда обозначают символом

$$\binom{n}{k}.$$

Пример 6.1. Раскрыть скобки в выражении $(a+b)^5$.

Решение. Ввиду формулы (6.1) имеем

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \qquad \square$$

Пример 6.2. Раскрыть скобки в выражении $(x-y)^n$.

Решение.

$$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (-y)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k = x^n - C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 - \ldots$$

$$+ (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x y^{n-1} + (-1)^n y^n. \qquad \square$$

Пример 6.3. Раскрыть скобки в выражении $(2x-3y)^4$.

Решение.

$$(2x-3y)^4 = (2x)^4 - C_4^1 (2x)^3 (3y) + C_4^2 (2x)^2 (3y)^2 - C_4^3 (2x)(3y)^3 + (3y)^4 =$$

$$= 16x^4 - 4 \cdot 8 \cdot 3x^3 y + 6 \cdot 4 \cdot 9x^2 y^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27xy^3 + 81y^4 =$$

$$= 16x^4 - 96x^3 y + 216x^2 y^2 - 216xy^3 + 81y^4. \qquad \square$$

Докажем равенство

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Все $(k+1)$-подмножества множества A разобьем на два сорта. Подмножеством первого сорта назовем подмножество, содержащее элемент a_{n+1}. Подмножеством второго сорта назовем подмножество, не содержащее элемент a_{n+1}. Всякое подмножество первого сорта получается из k-элементного подмножества множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ добавлением элемента a_{n+1}. Поэтому различных подмножеств первого сорта в точности C_n^k. Всякое подмножество второго сорта является $(k+1)$-подмножеством множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Поэтому различных подмножеств второго сорта в точности C_n^{k+1}. Поскольку все подмножества первого и второго сорта дают все $(k+1)$-элементные подмножества множества A, то тем самым равенство (6.4) доказано. $\square$

Биномиальные коэффициенты удобно вычислять, строя таблицу специального вида. Эту таблицу называют *треугольником Паскаля.* Строки таблицы нумеруются целыми неотрицательными числами $n = 0, 1, 2, \ldots$. Строка с номером n состоит из $n+1$ числа:

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n.$$

Для получения очередной строки используют равенство (6.4) и равенства (3.6).

Выпишем треугольник Паскаля для $n \leq 5$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Перейдем к следствиям из биномиальной теоремы. Прежде всего отметим формулу

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n =$$
$$= C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \tag{6.5}$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{6.6}$$

Функция

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

называется *производящей функцией* последовательности (6.6). Согласно (6.5) для последовательности биномиальных коэффициентов

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n \tag{6.7}$$

производящей функцией будет функция

$$f(x) = (1+x)^n. \tag{6.8}$$

С помощью производящих функций удобно вычислять суммы вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k a_k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 a_k$$

и доказывать различные тождества.

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = f(1).$$

Имеем

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

Отсюда

$$f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{k=0}^{n} k a_k.$$

Следовательно,
$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = f'(1).$$
Далее,
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2}.$$
Поэтому
$$f''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 a_k - \sum_{k=0}^{n} ka_k,$$
откуда
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 a_k = f''(1) + \sum_{k=0}^{n} ka_k = f''(1) + f'(1).$$
В частности, для биномиальных коэффициентов (6.7) и производящей функции (6.8) верны следующие соотношения.
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = f(1) = (1+1)^n = 2^n.$$
Этот результат был получен другим способом раньше (см. тождество (3.8)).
$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}, \qquad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$
$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = f'(1) = n2^{n-1}.$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = f''(1) + f'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = f(-1) = (1+(-1))^n = 0.$$
Последнее соотношение означает, что сумма коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в последовательности (6.7), равна сумме коэффициентов членов, стоящих на четных местах. Каждая из них ввиду тождества (3.8) составляет 2^{n-1}.

Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают. Действительно, рассмотрим отношение соседних биномиальных коэффициентов:

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n! \cdot k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)! \cdot n!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Имеем

$$\frac{n-k}{k+1} > 1 \iff n-k > k+1 \iff k < \frac{n-1}{2}.$$

Следовательно, при $k < \dfrac{n-1}{2}$ выполняется неравенство

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} > 1, \qquad \text{т. е. } C_n^k < C_n^{k+1}.$$

При $k > \dfrac{n-1}{2}$ получаем

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} < 1, \qquad C_n^k > C_n^{k+1}.$$

При $k = \dfrac{n-1}{2}$ (при нечетном n) имеем

$$C_n^k = C_n^{k+1},$$

т. е. два средних члена последовательности (6.7) равны между собой и являются наибольшими. При четном n наибольший из биномиальных коэффициентов C_n^k имеет номер

$$k_0 = \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1, \tag{6.9}$$

где $[x]$ — целая часть x (наибольшее целое, не превосходящее x). При нечетном n формула (6.9) также работает: максимум биномиальных коэффициентов достигается при $k = k_0 - 1$ и $k = k_0$.

Биномиальный коэффициент C_n^k при небольших n может быть найден непосредственно. Однако с ростом n числа $n!$ растут очень быстро.

$$\begin{aligned}
10! &= 3\ 628\ 800,\\
15! &= 1\ 307\ 674\ 368\ 000,\\
100! &= 93326215443944152681699238856266700490715968264381\\
&\quad 62146859296389521759999322991560894146397615651828\\
&\quad 62536979208272237582511852109168640000000000000000\\
&\quad 00000000.
\end{aligned}$$

Число 100! содержит 158 цифр.

При больших n для вычисления $n!$ и C_n^k можно воспользоваться асимптотической формулой для $n!$. Две вещественные функции $f(n)$ и $g(n)$ от натурального аргумента называются *асимптотически равными* (*эквивалентными*), пишут $f(n) \sim g(n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Справедлива следующая формула

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},$$

называемая *формулой Стирлинга*. Более точная оценка (см. [20]) выглядит так:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}, \qquad \text{где } \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

Наконец, можно воспользоваться компьютерной системой Maple [7] для вычисления (при больших n) как $n!$, так и биномиальных коэффициентов.

В силу формулы Стирлинга

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim 2^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

§ 7. Полиномиальная теорема

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k, n$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Положим

$$C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{7.1}$$

Числа $C_n^{n_1,\ldots,n_k}$ называются *полиномиальными коэффициентами*. При $k = 2$ имеем

$$C_n^{n_1,n_2} = C_n^{n_1} = C_n^{n_2},$$

т. е. в этом случае полиномиальный коэффициент совпадает с биномиальным коэффициентом. Полиномиальный коэффициент $C_n^{n_1,\ldots,n_k}$ также обозначают символом

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k}.$$

Теорема 7.1 (полиномиальная теорема).

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} C_n^{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}. \tag{7.2}$$

Выражение $(x_1 + \ldots + x_k)^n$ *равно сумме всевозможных членов вида*

$$C_n^{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k},$$

где $n_1 + \ldots + n_k = n$, $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Доказательство. В правой части равенства

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \ldots + x_k) \ldots (x_1 + \ldots + x_k)}_{n}$$

занумеруем множители $(x_1 + \ldots + x_k)$ числами от 1 до n. Получим произведение

$$(x_1 + \ldots + x_k)_1 (x_1 + \ldots + x_k)_2 \ldots (x_1 + \ldots + x_k)_n. \tag{7.3}$$

В произведении (7.3) раскроем скобки. Это даст сумму вида

$$S = \ldots + x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} + \ldots,$$

где $x_{i_j} \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, $1 \le j \le n$, x_{i_1} берется из первого множителя $(x_1 + \ldots + x_k)_1$ произведения (7.3), x_{i_2} — из второго множителя $(x_1 + \ldots + x_k)_2$ и т. д. В сумме S всего (до приведения подобных членов) k^n слагаемых, но многие из них равны между собой. Пусть в произведении

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} \tag{7.4}$$

переменная x_1 встречается n_1 раз, переменная x_2 — n_2 раза, …, переменная x_k — n_k раз. Тогда (7.4) можно переписать в виде

$$x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k}. \tag{7.5}$$

Ясно, что $n_1 + \ldots + n_k = n$. Посмотрим, сколько раз выражение (7.5) встречается в сумме S. Чтобы получить (7.5), нужно выбрать подмножество

$$I_1 = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}\}$$

в множестве $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, а затем в произведении (7.3) из множителей с номерами из I_1 взять x_1. Далее, надо отобрать подмножество

$$I_2 = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n_2}\}$$

в множестве $I \backslash I_1$, после чего в произведении (7.3) из множителей с номерами из I_2 взять x_2. Потом берем подмножество

$$I_3 = \{l_1, l_2, \ldots, l_{n_3}\}$$

в множестве $I \backslash (I_1 \cup I_2)$ и переменную x_3 в множителях произведения (7.3), имеющих номера из I_3, и т. д. Нетрудно видеть, что это дает все варианты получения (7.5). Множество I_1 можно выбрать $C_n^{n_1}$ способами, множество I_2 — $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами, множество I_3 — $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами и т. д. По правилу умножения общее число упорядоченных наборов

$$(I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k)$$

и, следовательно, общее число слагаемых вида (7.5) в сумме S равно

$$
\begin{aligned}
&C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \\
&\quad = \frac{n!(n-n_1)!\ldots(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)!\ldots n_k!(n-n_1-\ldots-n_k)!} = \\
&\qquad = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} = C_n^{n_1,\ldots,n_k}.
\end{aligned}
$$

Набор степеней $(n_1, \ldots, n_k)$ в произведении (7.5) является решением уравнения

$$n_1 + \ldots + n_k = n$$

в целых неотрицательных числах. Любое такое решение этого уравнения может встретиться в виде набора степеней для произведения (7.5). Ввиду задачи 1 число таких решений равно C_{n+k-1}^n. Следовательно, после приведения подобных членов сумма S будет содержать всего C_{n+k-1}^n слагаемых вида

$$C_n^{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Таким образом, равенство (7.2) доказано. $\square$

Пример 7.1. Раскрыть скобки в выражении

$$(x_1 + \ldots + x_k)^2.$$

Решение. В силу полиномиальной теоремы

$$(x_1 + \ldots + x_k)^2 = \sum_{n_1+\ldots+n_k=2} C_n^{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Уравнение

$$n_1 + \ldots + n_k = 2$$

имеет решения двух типов:

1) имеющих вид $(0, \ldots, \underset{i}{2}, \ldots, 0)$;

2) имеющих вид $(0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0)$, $i < j$.

Решений первого типа всего k и для них

$$C_2^{0,\ldots,2,\ldots,0} = \frac{2!}{0!\ldots 2!\ldots 0!} = 1.$$

Решений первого типа C_k^2 и для них

$$C_2^{0,\ldots,1,\ldots,1,\ldots,0} = \frac{2!}{0!\ldots 1!\ldots 1!\ldots 0!} = 2.$$

Поэтому

$$(x_1 + \ldots + x_k)^2 = \sum_{n_1+\ldots+n_k=2} C_n^{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} =$$

$$= \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j. \qquad \square$$

Пусть A — множество, содержащее n элементов. *Упорядоченным разбиением* множества A называется упорядоченный набор непустых подмножеств A_1, …, A_k этого множества, таких, что

1) $A_1 \cup \ldots \cup A_k = A$;

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пусть $|A_1| = n_1$, …, $|A_k| = n_k$. Тогда разбиение $(A_1, \ldots, A_k)$ называем $(n_1, \ldots, n_k)$-разбиением. Два упорядоченных разбиения $(A_1, \ldots, A_k)$ и $(B_1, \ldots, B_k)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $A_1 = B_1$, …, $A_k = B_k$.

Теорема 7.2. *Число различных упорядоченных* $(n_1, \ldots, n_k)$*-разбиений равно*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Доказательство теоремы 7.2 содержится в доказательстве теоремы 7.1. $\square$

§ 8. Формула включения и исключения

Пусть U — непустое множество, $P(U)$ — множество всех его подмножеств. При работе с множеством $P(U)$ исходное множество U часто называют *универсальным множеством.* Напомним основные свойства операций объединения, пересечения и взятия дополнения (до универсального множества).

Для любых $A, B, C \in P(U)$ выполняются следующие равенства:

$$
\begin{array}{ll}
A \cup A = A, & A \cap A = A, \\
A \cup B = B \cup A, & A \cap B = B \cap A, \\
A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup (A \cap B) = A, & A \cap (A \cup B) = A, \\
\multicolumn{2}{c}{\overline{\overline{A}} = A,} \\
\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \\
A \cup \overline{A} = U, & A \cap \overline{A} = \emptyset, \\
A \cup \emptyset = A, & A \cap U = A, \\
A \cup U = U, & A \cap \emptyset = \emptyset.
\end{array}
$$

Говорят, что $P(U)$ вместе с операциями $\cup$, $\cap$ и $^{-}$ является *булевой алгеброй* с *нулем* $\emptyset$ и *единицей* U.

Проверить справедливость перечисленных равенств можно с помощью диаграмм Эйлера или путем рассуждений. (Доказательства проводятся в два этапа. Сначала доказываем, что левая часть равенства является подмножеством правой части. Затем, что правая часть равенства является подмножеством левой части.)

Пусть A — конечное множество, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$, $n \geq 1$. Следующая формула

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = |A| - |A_1| - \cdots - |A_n| + \\
+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_i \cap A_j| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| - \\
- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \cdots - |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| + \\
+ \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

называется *формулой включения и исключения.* В этой формуле содержится C_n^2 слагаемых вида

$$|A_i \cap A_j| \qquad (i < j),$$

C_n^3 слагаемых вида

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| \qquad (i < j < k)$$

и т. д. Всего в правой части формулы содержится 2^n слагаемых.

Справедливость формулы (8.1) докажем индукцией по n. При $n = 1$ формула (8.1) превращается в равенство

$$\left|\overline{A_1}\right| = |A| - |A_1|,$$

которое очевидно. Пусть формула включения и исключения верна, когда число подмножеств равно $n-1$. Отметим равенство

$$X \cap \overline{B} = X \setminus (X \cap B),$$

которое легко проверяется с помощью диаграммы Эйлера (или простым рассуждением). Положим

$$X = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}, \qquad B = A_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| &= \left|X \setminus (X \cap A_n)\right| = |X| - |X \cap A_n| = \\ &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right| - \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right|. \quad (8.2)\end{aligned}$$

По индуктивному предположению

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}\right| = |A| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| - \cdots + \\ + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}|. \quad (8.3)\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие подмножества множества A_n:

$$B_i = A_i \cap A_n \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Пусть

$$\overline{B_i} = A_n \setminus B_i \qquad (\text{дополнение } B_i \text{ в множестве } A_n).$$

Имеем

$$\overline{B_i} = A_n \setminus (A_i \cap A_n) = \overline{A_i} \cap A_n.$$

Применяя (8.3) с A_n вместо A и B_i вместо A_i (i=1,…,$n-1$), получаем

$$\begin{gathered}\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n\right| = \left|(\overline{A_1} \cap A_n) \cap \dots \cap (\overline{A_{n-1}} \cap A_n)\right| = \\ = \left|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}}\right| = |A_n| - \sum_{i=1}^{n-1} |B_i| + \sum_{i<j} |B_i \cap B_j| - \dots + \\ + (-1)^{n-1}|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}| = \\ = |A_n| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j \cap A_n| - \dots + \\ + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n|. \quad (8.4)\end{gathered}$$

Подставляя (8.4) и (8.3) в (8.2), получаем (8.1):

$$\begin{gathered}\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_n}\right| = \left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_{n-1}}\right| - \left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_{n-1}}\cap A_n\right| = \\ = |A| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n-1} |A_i \cap A_j| - \dots + \\ + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}| - \\ - |A_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \dots + \\ + (-1)^{n}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n|.\end{gathered}$$

Таким образом, формула (8.1) доказана.

В формуле (8.4) возьмем вместо множества A_n множество $A_1\cap\dots\cap A_k$, а вместо множества

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}$$

множество

$$\overline{A_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A_n}.$$

В результате получим равенство

$$\left|A_1\cap\dots\cap A_k\cap\overline{A_{k+1}}\cap\dots\cap\overline{A_n}\right| = |A_1\cap\dots\cap A_k| - \sum_{i=k+1}^{n}|A_1\cap\dots\cap A_k\cap A_i| +$$
$$+ \sum_{k+1\le i<j\le n}|A_1\cap\dots\cap A_k\cap A_i\cap A_j| - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-k}|A_1\cap\dots\cap A_k\cap A_{k+1}\cap\dots\cap A_n|. \quad (8.5)$$

Формулу (8.5) также называют *формулой включения и исключения.*

Посмотрим на формулы (8.1) и (8.5) с другой точки зрения. Пусть множество A_i состоит из тех и только тех элементов множества A, которые обладают свойством P_i (i=1,...,n). Тогда мы скажем, что подмножество $A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}$ состоит из тех и только тех элементов множества A, которые обладают свойством $P_{i_1}\wedge\dots\wedge P_{i_k}$. (Знак $\wedge$ обозначает конъюнкцию.) Таким образом, если элементы множества A могут обладать n различными свойствами, то число элементов A, обладающих k указанными свойствами и не обладающих $n-k$ остальными, дается формулой (8.5).

Пример 8.1. Пусть $A = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Рассмотрим следующие свойства элементов множества A:

$P_1 : x$ — четное число;

$P_2 : x > 6$;

$P_3 : 2 < x < 8$.

Подсчитаем число элементов A, обладающих свойством $P_1\wedge\overline{P_2}\wedge\overline{P_3}$. (Символ $\overline{P}$ обозначает отрицание свойства P.) Обозначим подмножества, соответствующие свойствам P_1, P_2, P_3, через A_1, A_2, A_3 соответственно. Тогда

$$|A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |A_1| - |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

“Просеиваем” сначала A через P_1. Это дает множество A_1 и $|A_1| = 6$. Затем просеиваем A_1 через P_2 и P_3. Получим $|A_1\cap A_2| = 2$, $|A_1\cap A_3| = 2$.

Просеиваем $A_1 \cap A_2$ через P_3: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. Отсюда

$$|A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 6 - 2 - 2 + 0 = 2.$$

Формула (8.5) не позволяет перечислить элементы множества $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. Находим их, выписывая последовательно:

$$A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad A_1 \cap \overline{A_2} = \{0, 2, 4, 6\}, \quad A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \{0, 2\}.$$

Пример 8.2. В группе студентов 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык (английский, немецкий, французский). Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский.

1) Сколько человек знают все три языка?

2) Сколько человек знают ровно два языка?

3) Сколько человек знают только английский язык?

Решение. Пусть A — множество всех студентов. Рассмотрим свойства

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \{x \text{ знает английский}\},\\ P_2(x) &= \{x \text{ знает немецкий}\},\\ P_3(x) &= \{x \text{ знает французский}\}. \end{aligned}$$

Положим

$$A_1 = \{x \in A \mid P_1(x)\}, \quad A_2 = \{x \in A \mid P_2(x)\}, \quad A_3 = \{x \in A \mid P_3(x)\}.$$

Имеем

$$|A| = 13, \quad |A_1| = 10, \quad |A_2| = 7, \quad |A_3| = 6.$$

Далее,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3, \qquad \overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \emptyset.$$

Для 1):

$$\begin{aligned} 0 = \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + {}&\\ + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|&, \end{aligned}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 13 - 10 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 = 2.$$

Для 2):

$$\begin{aligned}
\left|A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right| &= |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5 - 2 = 3,\\
\left|A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right| &= |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4 - 2 = 2,\\
\left|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right| &= |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 - 2 = 1.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right| + \left|A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right| + \left|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right| = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Для 3):

$$\begin{aligned}
\left|A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + \\
+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 10 - 5 - 4 + 2 = 3. \qquad \square
\end{aligned}$$

§ 9. Задачи

9.1. Сколько номеров, состоящих из двух букв, за которыми идут четыре цифры, можно составить, используя 26 букв и 10 цифр?

9.2. Сколько упорядоченных пар можно составить из 6 цифр, если в каждой паре обе цифры различны? цифры могут совпадать?

9.3. Каково число матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества $\{0, 1\}$?

9.4. Каково число матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества $\{0, 1\}$ при условии, что строки матрицы попарно различны?

9.5. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы записать все натуральные числа, меньшие, чем 10^n?

9.6. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т. е. некоторое число очков встретилось бы на обеих костях).

9.7. Бросают три игральные кости (с шестью гранями каждая). Сколькими способами они могут упасть так, что либо все оказавшиеся вверху грани одинаковы, либо все попарно различны?

9.8. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300? (Два способа, различающиеся лишь порядком имен, считаются различными.)

9.9. Сколько шестизначных номеров можно составить из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

9.10. Найти число отображений множества A в множество B, если $|A| = n$, $|B| = m$.

9.11. Сколькими способами можно разделить 7 лотерейных билетов между тремя студентами?

9.12. Сколькими способами можно разложить 14 различных деталей по 5 ящикам?

9.13. Найти число инъективных отображений (вложений) множества A в множество B, если $|A| = n$, $|B| = m$.

9.14. Сколькими способами 5 человек могут сесть на 5 стульев, расположенных в один ряд? Сколько при этом случаев, когда выделенные два человека будут сидеть рядом?

9.15. Сколькими способами 5 человек могут сесть на 5 стульев за круглым столом? Сколько при этом случаев, когда выделенные два человека будут сидеть рядом?

9.16. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Множество всех взаимно однозначных отображений множества Ω на себя обозначим через S_n. Найти $|S_n|$.

9.17. Сколькими способами можно отобрать для спортивных соревнований команду из 3 человек, если имеется 8 спортсменов?

9.18. Найти число слов длины $m+n$, содержащих m раз букву a и n раз букву b.

9.19. Сколькими способами можно поставить 5 шашек на белые поля доски?

9.20. У одного человека есть 10 книг, а у другого — 12 книг. Сколькими способами они могут выбрать по три книги каждый для обмена?

9.21. Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении с севера на юг n, а в направлении с востока на запад k. Сколько имеется кратчайших дорог с одной вершины прямоугольника до противоположной?

9.22. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

9.23. Сколькими способами можно разложить 24 различных предмета по четырем различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 6 предметов?

9.24. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове "парабола"?

9.25. Найти число решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

в целых положительных числах.

9.26. Сколько наборов из 6 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта пирожных?

9.27. Сколькими способами можно разместить n шаров по k ячейкам? Рассмотреть случаи различимых и неразличимых шаров, а также случай, когда в каждой ячейке может находиться не более одного шара, и случай, когда в каждой ячейке может находиться любое число шаров.

9.28. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех лимонов и девяти апельсинов (фрукты одного вида считаются неразличимыми)?

9.29. Сколько слов, содержащих не менее чем одну букву, можно составить из двух букв "А", пяти букв "Б" и девяти букв "В"?

9.30. 20 различных деталей раскладывают в три ящика, причем в первый ящик кладут 3 детали, во второй — 5 деталей, а в третий — все остальные детали. Сколькими способами это можно сделать?

9.31. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно составить из букв слова "уравнение"?

9.32. 20 пассажиров собираются совершить поездку в поезде. В кассе есть 12 билетов на нижние полки и 8 — на верхние. При этом 4 пассажира не желают ехать внизу, а 5 пассажиров — наверху. Сколькими способами их можно разместить в поезде, если порядок размещения пассажиров по местам как внизу, так и наверху не учитывается?

9.33. Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакие две цифры в нем не повторяются?

9.34. В лаборатории работают 8 физиков и 10 химиков. Надо создать рабочие группы по трем темам. В первую группу должны войти 4 физика, во вторую — 5 химиков, а третья должна состоять из трех человек, которые могут быть как физиками, так и химиками. Сколькими способами можно создать такие группы?

9.35. В течение 10 недель студенты должны написать 10 контрольных работ, в том числе 2 по математике. Сколькими способами можно составить расписание этих работ так, чтобы контрольные работы по математике не шли друг за другом?

9.36. У филателиста есть 8 разных марок на космическую тему и 10 разных марок на спортивную тему. Сколькими способами он может наклеить 3 марки первого вида и 3 марки второго вида в альбом на 6 пронумерованных мест?

9.37. В мастерской по изготовлению ключей есть 12 типов заготовок для ключей. Из каждой заготовки можно сделать ключ, вырезав выступы в пяти определенных местах, причем на первом месте величина выступа может принимать 2 значения, а на остальных — 3 значения. Сколько различных ключей может изготовить мастерская?

9.38. В урне 15 белых, 10 черных и 20 красных шаров. Сколькими способами можно извлечь из урны 15 шаров, из которых 5 белых, 5 черных и 5 красных?

9.39. Сколько существует комбинаций из 9 карт, содержащих ровно 3 туза, если всего карт 52?

9.40. Найдите разложение степени бинома:

$$\begin{array}{llllll} 1) & (a+b)^7; & 4) & (x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^5; & 7) & (1+y^2)^4; \\ 2) & (x-y)^5; & 5) & (x-2y)^6; & 8) & (p^{-2}-1)^6; \\ 3) & (\sqrt{x}-\sqrt{y})^4; & 6) & (3x-1)^7; & 9) & (\frac{1}{y}+2)^5. \end{array}$$

9.41. Слагаемое $C_n^k x^{n-k} y^k$ в формуле

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \tag{9.1}$$

будем называть k-м членом разложения (9.1). Найдите четвертое слагаемое разложения

$$(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{2}{3}})^{12}.$$

9.42. Найдите номер члена разложения $(z+z^{-2})^{12}$, не содержащего z, т. е. содержащего z в нулевой степени.

9.43. Найдите номер наибольшего члена в разложении $(1+0{,}01)^{1000}$.

9.44. Найдите два средних члена разложения $(a^3-ab)^{31}$.

9.45. Доказать, что если p — простое число, то числа

$$C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{p-1}$$

делятся на p.

9.46. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_m^k = C_{m-1}^n \qquad (m \geq n+1).$$

9.47. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

9.48. Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

9.49. Пользуясь полиномиальной теоремой, найдите

$$(a) \quad (x+y+z)^4; \qquad (b) \quad (2x+y-z)^3.$$

9.50. Полиномиальный коэффициент $C_n^{n_1,\ldots,n_k}$ часто обозначают символом

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}.$$

Докажите равенство

$$\binom{n+1}{i,j,k} = \binom{n}{i-1,j,k} + \binom{n}{i,j-1,k} + \binom{n}{i,j,k-1}.$$

9.51. Сколько членов имеется в каждом из выражений:

$$(a) \quad (x+y+z)^6; \qquad (b) \quad (a+2b+5c+d)^4; \qquad (c) \quad (r+s+t+n+v)^6.$$

9.52. Пусть A — множество, содержащее n элементов. *Неупорядоченным разбиением* множества A называется неупорядоченный набор непустых подмножеств A_1, …, A_k этого множества, таких, что

1) $A_1 \cup \ldots \cup A_k = A$;

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Обозначим через S_k множество всех подстановок k-й степени, т. е. множество всех взаимно однозначных отображений множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ на себя. Два неупорядоченных разбиения $\{A_1, \ldots, A_k\}$ и $\{B_1, \ldots, B_k\}$ считаются равными тогда и только тогда, когда для некоторой подстановки $\sigma \in S_k$ выполняются равенства $A_1 = B_{\sigma(1)}, \ldots, A_k = B_{\sigma(k)}$.

Пусть m_i — число подмножеств A_j в разбиении $\{A_1, \ldots, A_k\}$ мощности i $(\leq i \leq n)$. Упорядоченный набор $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ назовем *спектром* разбиения $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = k, \qquad \sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n.$$

Обозначим через $N(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ число всех неупорядоченных разбиений множества A, имеющих спектр $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Доказать, что

$$N(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n} m_1! m_2! \ldots m_n!}.$$

9.53. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% — журнал B, 50% — журнал C, 30% — журналы A и B, 20% — журналы B и C, 40% — журналы A и C, 10% — журналы A, B и C. Сколько процентов студентов

1) не читают ни один из журналов;

2) читают в точности два журнала;

3) читают не менее двух журналов?

9.54. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

9.55. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15.

9.56. Показать, что если $n = 30m$, то число целых положительных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

9.57. Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Показать, что число простых чисел p, таких, что $\sqrt{n} < p \leq n$, равно $n - 1 - \sum_{k=1}^{r}(-1)^k S_k$, где сумма

$$S_k = \sum \left[\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}}\right]$$

берется по всевозможным $\binom{r}{k}$ наборам показателей $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, в которых ровно k из показателей равны 1, а остальные — нулю.

9.58. Найти число простых чисел, не превосходящих 250.

9.59. *Задача мажордома.* К обеду за круглым столом приглашены n пар враждующих рыцарей ($n \geq 2$). Требуется рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом. Показать, что это можно сделать

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$$

способами.

9.60. *Задача о супружеских парах.* Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

9.61. Сколько существует перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ таких, что $a_i \neq i$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$?

Список рекомендуемой литературы

1. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9-го класса средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1978. — 224 с.

2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. — 328 с.

3. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975. — 208 с.

4. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. — М.: Просвещение, 1995. — 288 с.

5. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. — М.: Наука, 1966. — 424 с.

6. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. — М.: Наука, 1977. — 368 с.

7. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5. — М.: СОЛОН, 1998. — 399 с.

8. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977. — 80 с.

9. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. — 288 с.

10. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. — М.: Мир, 1965. — 486 с.

11. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

12. Лукаш Е.Н., Медведев П.А., Пахомов В.Ф. Высшая математика. Теория вероятностей: Учеб.–метод. пособие для студентов эконом. ф–тов гос. ун–тов. — М.: Изд–во МГУ, 1987. — 61 с.

13. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. — СПб.: Питер, 2001. — 304 с.

14. Олимпиады: Алгебра. Комбинаторика. — Новосибирск: Наука, 1979. — 176 с.

15. Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966. — 154 с.

16. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. — М.: Иностр. лит., 1963. — 287 с.

17. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982. — 255 с.

18. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. — Новосибирск: Наука, 1975. — 422 с.

19. Сборник задач по математике для втузов. Спец. курсы / Под ред. А.В. Ефимова. — М.: Наука, 1984. — 608 с.

20. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. Т. 1. — М.: Мир, 1984. — 528 с.

21. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 424 с.

22. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 576 с.

Оглавление

Учебное издание

ШАБУНИН Леонид Васильевич

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Конспект лекций

Отв. за выпуск В.Н. Антонова

Подписано в печать 7.10.2003. Формат 60 x 84/16. Бумага газетная. Печать оперативная. Усл.-печ. л. 2,79. Уч-изд. л. 3,0.
Тираж 200 экз. Заказ N 800

Чувашский государственный университет
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15