

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметричного относительно начала координат, зная, кроме того, что:

- 1) его полуоси равны 5 и 2;
- 2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;
- 3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$;
- 4) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
- 6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
- 7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c=4$;
- 8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
- 9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
- 10) расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

2. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

- 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- 2) $x^2 + 25y^2 = 25$;
- 3) $5x^2 + 9y^2 = 25$;
- 4) $x^2 + 4y^2 = 1$;
- 5) $25x^2 + 9y^2 = 1$;
- 6) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;
- 7) $x^2 + 5y^2 = 15$;
- 8) $9x^2 + 25y^2 = 1$;
- 9) $16x^2 + y^2 = 16$;
- 10) $9x^2 + y^2 = 1$.

3. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

4. Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

5. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

- 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- 3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

РЕШЕНИЕ:

1. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметричного относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;

$$a = 5, \quad b = 2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – каноническое уравнение эллипса}$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5; \quad c = 4, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – каноническое уравнение эллипса}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3, \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$;

$$2b = 24 \Rightarrow b = 12; \quad c = 5, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – каноническое уравнение эллипса}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 144 - 25 = 169 \Rightarrow a = 13,$$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

4) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

$$2a = 20 \Rightarrow a = 10; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow b = 8,$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{a}$$

$$\frac{144}{169} = \frac{a^2 - 25}{a^2}$$

$$144a^2 = 169(a^2 - 25)$$

$$144a^2 = 169a^2 - 169 \cdot 25$$

$$169 \cdot 25 = 169a^2 - 144a^2$$

$$169 \cdot 25 = 25a^2$$

$$169 = a^2 \Rightarrow a = 13$$

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c=4$;

$$2x = 5 \Rightarrow x = 2,5; \quad c = 2$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow a^2 = x \cdot c = 2,5 \cdot 2 = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow b = 1,$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$$

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;

$$2x = 16 \Rightarrow x = 8; \quad 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow c = \frac{a^2}{x} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12},$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

$$2x = 13 \Rightarrow x = 6,5; \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = \frac{b^2 + c^2}{c} \Rightarrow 6,5 = \frac{9 + c^2}{c}$$

$$6,5c = 9 + c^2$$

$$c^2 - 6,5c + 9 = 0$$

$$D = 6,5^2 - 4 \cdot 9 = 42,25 - 36 = 6,25 = 2,5^2$$

$$c_1 = \frac{6,5 + 2,5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$c_2 = \frac{6,5 - 2,5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 20,25 = 29,25$$

$$\frac{x^2}{29,25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 4 = 13$$

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

10) расстояние между его директрисами равно 32 и $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$2x = 32 \Rightarrow x = 16; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow 2a = 16, \quad a = 8$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

2. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

6) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$

2) $x^2 + 25y^2 = 25;$

7) $x^2 + 5y^2 = 15;$

3) $5x^2 + 9y^2 = 25;$

8) $9x^2 + 25y^2 = 1;$

4) $x^2 + 4y^2 = 1;$

9) $16x^2 + y^2 = 16;$

5) $25x^2 + 9y^2 = 1;$

10) $9x^2 + y^2 = 1.$

РЕШЕНИЕ.

3) $5x^2 + 9y^2 = 25;$

$$\frac{5x^2}{25} + \frac{9y^2}{25} = 1;$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1; \quad a = \sqrt{5}, \quad b = \frac{5}{3}$$

5) $25x^2 + 9y^2 = 1;$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{25}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1; \quad a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{1}{3}$$

5. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

$$1) 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$$

$$5x^2 - 30x + 9y^2 + 18y + 9 = 0;$$

$$5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 0;$$

$$5(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) + 9 = 0;$$

$$5(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 45 - 9 = 0;$$

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45;$$

$$\frac{5(x-3)^2}{45} + \frac{9(y+1)^2}{45} = 1;$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1;$$

Центр в точке $(3; -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$;

$$2) 16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0;$$

$$3) 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси $2a=10$ и $2b=8$;

2) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;

3) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) уравнение асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$;

6) расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами $2c=26$;

7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b=6$;

8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) уравнение асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$.

2. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

3) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$;

2) $x^2 - 4y^2 = 16$;

4) $x^2 - y^2 = 16$;

5) $4x^2 - 9y^2 = 25$;

7) $25x^2 - 16y^2 = 1$.

6) $9x^2 - 64y^2 = 1$;

3. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) полуоси a и b ;

2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра S , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

РЕШЕНИЕ

1. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее оси $2a=10$ и $2b=8$;

$$a = 5, \quad b = 4; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы}$$

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2) расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$;

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4; \quad c = 5, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow a = 3,$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

3) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5},$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

4) ось $2a=16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = \frac{5}{4} \cdot 8 = 10$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow b = 6,$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

5) уравнение асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$;

Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) называются **асимптотами** гиперболы:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

$$2c = 20, \quad c = 10, \quad \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{4}{3}a$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$100 = a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

$$100 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2$$

$$25 \cdot 4 = 25 \cdot \frac{1}{9} a^2$$

$$4 = \frac{1}{9} a^2$$

$$a^2 = 36, \quad a = 6$$

$$\text{Тогда } b = \frac{4}{3} a = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

6) расстояние между директрисами равно $\frac{228}{13}$ и расстояние между фокусами $2c=26$;

$$2x = \frac{228}{13} \Rightarrow x = \frac{228}{26} = \frac{114}{13}; \quad c = 13$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow a^2 = x \cdot c = \frac{114}{13} \cdot 13 = 114$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 169 - 114 = 55$$

$$\frac{x^2}{114} - \frac{y^2}{55} = 1$$

7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b=6$;

$$2x = \frac{32}{5} \Rightarrow x = \frac{32}{10}; \quad 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - b^2}{c} \Rightarrow \frac{32}{10} = \frac{c^2 - 9}{c}$$

$$32c = 10c^2 - 90$$

$$10c^2 - 32c - 90 = 0$$

$$5c^2 - 16c - 45 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-45) = 256 + 900 = 1156 = 34^2$$

$$c_1 = \frac{16 + 34}{10} = \frac{50}{10} = 5$$

$$c_2 = \frac{16 - 34}{10} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

$$2x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2a = 4, \quad a = 2$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

9) уравнение асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{64}{5}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{3}{4}a \quad 2x = \frac{64}{5} \Rightarrow x = \frac{64}{10} = \frac{32}{5};$$

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{25}{16}a^2}} = \frac{a^2}{\frac{5}{4}a} = \frac{4}{5}a = \frac{32}{5}$$

$$4a = 32, \quad a = 8, \quad b = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

2. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$

3) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1;$

2) $x^2 - 4y^2 = 16;$

4) $x^2 - y^2 = 16;$

5) $4x^2 - 9y^2 = 25;$

7) $25x^2 - 16y^2 = 1.$

6) $9x^2 - 64y^2 = 1;$

Решение.

2) $x^2 - 4y^2 = 16 \quad | \div 16;$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{4y^2}{16} = 1;$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad a = 4, \quad b = 2$$

6) $9x^2 - 64y^2 = 1;$

$$\frac{x^2}{1/9} - \frac{y^2}{1/64} = 1; \quad a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{8}$$

4. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

$$1) 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$$

$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 9(y^2 + 2 \cdot 3y + 9) - 161 - 64 + 81 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 = 144;$$

$$\frac{16(x - 2)^2}{144} - \frac{9(y + 3)^2}{144} = 1;$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 1;$$

Центр в точке $(2; -3)$, $a = 3$, $b = 4$;

