

## Биномиальная теорема

### Биномиальная теорема.

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^k x^{n-k} y^k + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k, \quad \text{т.к. } C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Формулу называют формулой Ньютона, а ее правую часть – разложением степени бинома.

Коэффициенты  $C_n^k$  формулы Ньютона называются биномиальными коэффициентами.

**Пример 1.** Раскрыть скобки в выражениях

$$(a + b)^4 \text{ и } (a + b)^5.$$

### Решение.

$$(a + b)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4;$$

$$(a + b)^5 = a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + b^5 =$$

$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

**Пример 2.** Раскрыть скобки в выражении

$$(x - y)^n.$$

### Решение.

$$(x - y)^n = (x + (-y))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (-y)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k =$$

$$= x^n - C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} y^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x y^{n-1} +$$

$$+ (-1)^n y^n.$$

### Свойства биномиальных коэффициентов

1.  $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т.е. равно  $(n + 1)$ .

3. Сумма показателей степеней  $a$  и  $b$  каждого члена разложения равна показателю степени бинома, т.е.  $n$ .

4. Правило симметрии. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

5. Основное свойство биномиальных коэффициентов (правило Паскаля):

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

6. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна  $2^n$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

7. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна  $2^{n-1}$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

8. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов равна нулю.

9. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов равна  $C_{2n}^n$ .

10. Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби  $\frac{n-(k-1)}{k}$

$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-(k-1)}{k}.$$

11. Для того, чтобы члены разложения были целыми числами, необходимо и достаточно, чтобы показатели степени были целыми неотрицательными числами.

## Задачи

**Задание 1.** Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении  $(3x + 2y)^4$ , используя формулу бинома Ньютона.

**Задание 2.** Найти коэффициент при  $x^2$  в разложении  $(2x + 3)^6$ .

**Задание 3.** Найти разложения полиномов

- |    |                           |    |   |     |                       |
|----|---------------------------|----|---|-----|-----------------------|
| 1. | $(2x - y)^4$              | 5. | $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^5$ | 9.  | $(a - \sqrt{2})^6$    |
| 2. | $(a + b)^7$               | 6. | $(x - 2y)^6$                            | 10. | $(p^{-2} - 1)^6$      |
| 3. | $(x - y)^5$               | 7. | $(3x - 1)^7$                            | 11. | $(\frac{1}{y} + 2)^5$ |
| 4. | $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$ | 8. | $(1 + y^2)^4$                           |     |                       |

**Задание 4.** Не раскладывая полностью, найти коэффициент при  $x^m$  в разложении полиномов

- $(x + 2)^{10}, m = 3$
- $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^8, m = 5$

**Задание 5.** Найдите четвертое слагаемое разложения

$$\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{2}{3}}\right)^{12}.$$

**Задание 6.** Найти шестой член разложения

$$(1 - 2z)^{21}.$$

**Задание 7.** Найти пятый член разложения бинома

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^{10}.$$

**Задание 8.** Определить степень бинома  $(3a - 2)^n$ , если известно, что коэффициент при  $a^2$  в разложении этого бинома равен 216.

**Задание 9.** Найдите номер члена разложения  $(z + z^{-4})^5$ , не содержащего  $z$ , т.е. содержащего  $z$  в нулевой степени.

**Задание 10.** Найти номер члена разложения бинома, не содержащего  $x$

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^6.$$

**Задание 11.** Найдите номер наибольшего члена в разложении  $(1 + 0,01)^{1000}$ .

**Задание 12.** Найдите два средних члена разложения  $(a^3 - ab)^{31}$ .

**Задание 13.** В биномиальном разложении  $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^n$  найти член разложения, не содержащий  $x$ .

**Задание 14.** Найти сумму биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома  $(x + y)^n$ , если биномиальный коэффициент третьего слагаемого на 9 больше биномиального коэффициента второго слагаемого.

**Задание 15.** Найти седьмой член разложения бинома  $\left(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$ , если биномиальный коэффициент третьего слагаемого равен 36.

**Задание 16.** Сколько членов разложения бинома  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$  являются целыми числами?

**Задание 17.** Вычислить сумму

$$C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5.$$

**Задание 18.** Вычислить сумму

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n.$$

**Задание 19.** Вычислить сумму

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

**Задание 20.** Доказать, что

$$\begin{aligned} 1 - 3C_{4k}^1 + 3^2 \cdot C_{4k}^2 - 3^3 \cdot C_{4k}^3 + \dots + 3^{4k-2} \cdot C_{4k}^{4k-2} - 3^{4k-1} \cdot C_{4k}^{4k-1} + 3^{4k} = \\ = 1 - 5C_{2k}^1 + 5^2 \cdot C_{2k}^2 - 5^3 \cdot C_{2k}^3 + \dots + 5^{2k-2} \cdot C_{2k}^{2k-2} - 5^{2k-1} \cdot C_{2k}^{2k-1} + 5^{2k}. \end{aligned}$$

**Задание 21.** Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно  $x$ ,

получаемого в разложении бинома  $(3x - 4)^{17}$ .

**Задание 22.** Сумма нечетных биномиальных коэффициентов разложения  $(ax + x^{-\frac{1}{4}})^n$  равна 512. Найти слагаемое, не содержащее  $x$ .

**Задание 23.** При каких значениях  $x$  четвертое слагаемое разложения  $(5 + 2x)^{16}$  больше двух соседних с ним слагаемых?

**Задание 24.** При каком значении  $x$  третье слагаемое разложения  $(\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2-x})^m$  в 32 раза больше  $m$ , если биномиальный коэффициент третьего слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5:1?

**Задание 25.** В какую наибольшую степень  $n$  следует возвести бином  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)^n$ , чтобы отношение четвертого слагаемого разложения к третьему было равно  $3\sqrt{2}$ ?

**Задание 26.** В разложении  $(x + y)^n$  по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий – 720, а четвертый – 1080. Найдите  $x$ ,  $y$  и  $n$ .

**Задание 27.** Найти все рациональные члены разложения  $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ , не выписывая члены иррациональные.

**Задание 28.** Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

$$1. \quad (\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{20} \quad 2. \quad (\sqrt[3]{6} + \sqrt[4]{2})^{100}.$$

**Задание 29.** Дано многочлен  $x(2 - 3x)^5 + x^3(1 + 2x^2)^7 - x^4(3 + 2x^3)^9$ . Найти коэффициент члена, содержащего  $x^5$ , если выполнить указанные действия.

**Задание 30.** Многочлен  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$  разложить по убывающим степеням  $x + 1$ .

**Задание 31.** Доказать, что для любых  $b > 1$  и для любых  $n > 1$  верно неравенство Бернулли:

$$b^n > 1 + n(b - 1).$$

**Задание 32.** Доказать, что

$$\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{1000} > 30$$

**Задание 33.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  число  $(4^n + 15n - 1)$  делится на 9.

**Задание 34.** Решить уравнение  $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$ .

**Задание 35.** Используя формулу бинома Ньютона, вычислить  $(1,0018)^5$  с точностью до  $\varepsilon = 0,0001$ .

**Задание 36.** Вычислить  $4,98^4$  с точностью до 0,01.