Алгебра множеств

Для любых $A, B, C \in P(M)$ выполняются следующие равенства:

1.	$A \cup A = A$	$1'$.	$A \cap A = A$
2.	$A \cup B = B \cup A$	$2'$.	$A \cap B = B \cap A$
3.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$3'$.	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$4'$.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.	$A \cup (A \cap B) = A$	$5'$.	$A \cap (A \cup B) = A$
6.	$\bar{\bar{A}} = A$		
7.	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$7'$.	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
8.	$A \cup \bar{A} = M$	$8'$.	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
9.	$A \cup \emptyset = A$	$9'$.	$A \cap M = A$
10.	$A \cup M = M$	$10'$.	$A \cap \emptyset = \emptyset$

Из перечисленных равенств следуют соотношения

11. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

12. $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

13. $A \backslash B = A \cap \bar{B}$.

14. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ – симметрическая разность множеств (может обозначаться также знаком + или $\oplus$).

Задачи

Задание 1. Укажите все элементы множества

$X = \{x | x = 2(n-1), n -$ натуральное число и $n \leq 3\}$.

Задание 2. Определить множество A решений уравнения $x^2 - 25 = 0$.

Задание 3. Определить множество B решений неравенства $2x + 9 \geq 0$.

Задание 4. Заданы множества A = {1; 3; 4; 6} и B = {3; 5; 6; 7}. Определить результаты операций

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A+B$.

Задание 5. Определить результаты тех же операций, если

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$.

Задание 6. Изобразить множества $A = \{x | x \in R, -1 \leq x < 4\}$ и $B = \{x | x \in R, 2 \leq x \leq 6\}$ на числовой прямой. Выполнить операции: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\bar{A}$, $A \times B$. Записать результат каждой операции с указанием характеристического свойства.

Задание 7. Найти все подмножества множества A = {0; 1; 3}.

Задание 8. Дано множество S = {a, b, c, 1, 2, 3, 4}. Сколько существует подмножеств этого множества не содержащих букв? Сколько существует подмножеств, не содержащих цифр? Сколько существует подмножеств, не содержащих ни букв, ни цифр?

Задание 9. Верно ли, что

1.	$\{\emptyset\} \in \{\emptyset, 1,2,3\}$	2.	$\{1,2\} \in \{1,2\}$;	3.	$\{2,3\} \subset \{\{1\}; 2; \{2\}; 3; \{3\}\}$

Задание 10. Верно ли, что

1.	$\{\{8\}; 4; 8; 4\} = \{8; \{8\}; 4\}$	2.	$\{1\} \in \{1; 2; 3\}$	3.	$\{1\} \subset \{1; \{3\}\}$.

Задание 11. Даны числовые множества

A={22,30,14,26}, B={22,31,26,30}, C={26,32,34,35}. Найти множество $A \cap (B \backslash C)$.

Задание 12. Даны множества A, B: $A = \{1,2,3,4,7\}$, $B = \{3,5,4,6\}$.

Перечислите элементы множества $M=\{x\mid x\in A\cup B, x>4\}$.

Задание 13. Заданы множества A, B, C:

$$A=\{2,3,4,5,6,7,8,24,25,28\}, B=\{4,7,10,11,20,21\}, C=\{3,7,9,10,19,21,23\}.$$

Найти: $A\cap B$, $A\cup B$, $B\setminus A$, $A\setminus(B\cap C)$, $A\cap B\cup C$, $(B\cap C)\setminus C$.

Задание 14. Дано универсальное множество $T=\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и два подмножества $R=\{2,3\}$ и $Q=\{2,7,4,8,6\}$. Укажите элементы, не входящие в множество $Q\bigcap R$.

Задание 15. Пусть $U\ =\{x,y,z,d,e,f,k,h\}$, $A\ =\{z,d,k\}$, $B\ =\{x,y,f\ \}$, $C\ =\{h,f\ \}$.

Найти $\bar A\setminus(\overline{C\setminus\bar B})$, $A\cup(\bar B\setminus\bar C)$, $\bar B\setminus(\overline{C\cap A})$, $\overline{B\setminus(C\cup\bar A)}$.

Задание 16. Пусть $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, A=\{1,2,4\}, B=\{1,2,5,6,8\}, C=\{2,4\}$.

Найти множества $A\cup\bar B, \overline{A\cup B}, (A\setminus\bar C)\cap(\bar B\setminus C)$.

Задание 17. Пусть $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12\}, A=\{1,2,5\}, B=\{1,2,6,8\}, C=\{2,4,12\}$.

Найти множества $A\cup\bar B, \overline{A\cup B}, (A\setminus C)\cap(\bar B\setminus\bar C)$.

Задание 18. Универсальное множество состоит из 33 строчных букв русского алфавита Заданы множества A, B, C. Найти множества X и Y и вычислить их мощность (количество элементов в множествах). Пусть даны множества: A={ф,п,д,к,ш}; B={ч,м,п,у,ш}; C={а,ю,ч,к,м,т,ф}. Требуется найти множества X=(A\C)∪(B\C); Y=(A\C)∩(B\C).

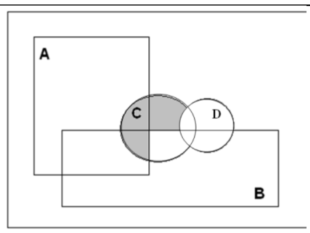
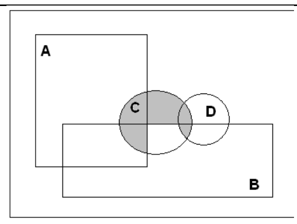
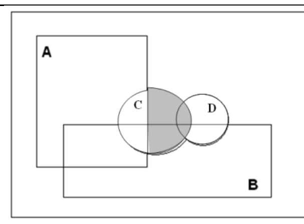
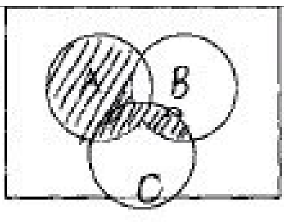
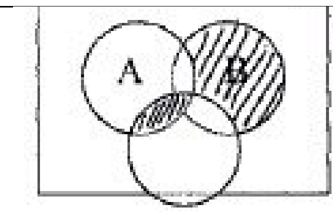
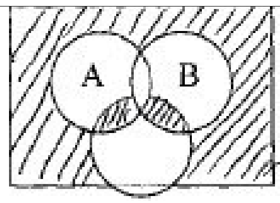
Задание 19. Нарисовать диаграммы Эйлера-Венна:

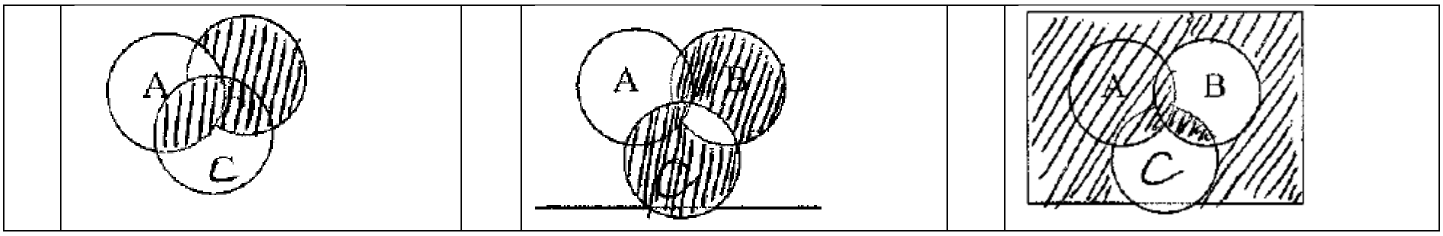
1.	$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cup(B\cap\bar A)$	4.	$(A\cup B)\cap\overline{A\cap C}\ \cap\ (A\ \cup\bar B\ )$
2.	$(A\oplus B)\bigcap(A\oplus C)$	5.	$(A\cap B)\cup\overline{A\cap C}\ \cup\ (B\cap C)$
3.	$(A\cup B)\cap\ (\bar C\ \cap B)\cap(A\cap B)\cap\ (C\cap\bar A)$	6.	$A\oplus\bar A\cap\bar B\oplus\bar A\cap B$

Задание 20. Для трех произвольных взаимно пересекающихся множеств A, B и C с помощью диаграмм Эйлера-Венна построить множество:

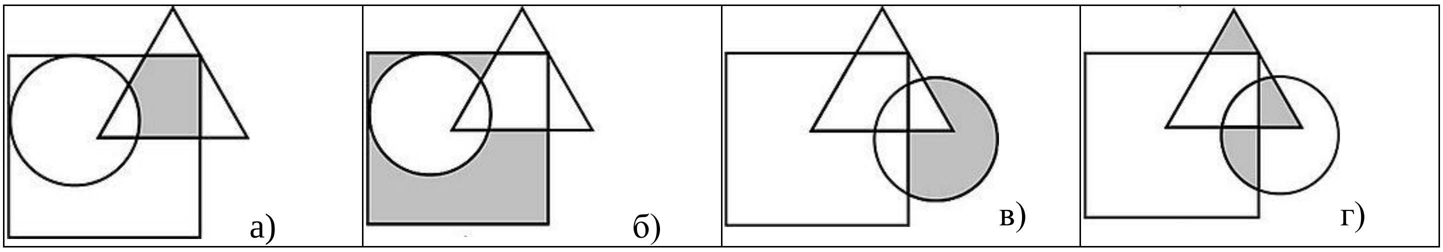
1. $A\,\Delta\,(B\setminus C)$.
2. $A\cap(\bar B\cup C)$.
3. $(A\cup B)\,\Delta\,(C\setminus B)$.
4. $(A\setminus B)\cap\bar C$.
5. $\overline{A\cup B}\,\Delta\,C$.
6. $(\bar B\,\Delta\,C)\cap(A\cup C)$.
7. $(A\,\Delta\,B)\setminus C$.
8. $(\bar A\cup B)\,\Delta\,C$.
9. $\overline{A\cup B}\cap C$.
10. $\overline{A\,\Delta\,B}\cup(A\setminus C)$.
11. $A\setminus(B\,\Delta\,C)$.
12. $\bar A\cap(B\cup C)$.
13. $(C\setminus A)\,\Delta\,(C\setminus B)$.
14. $\overline{A\setminus B}\cap C$.
15. $(A\cup B)\,\Delta\,C$.
16. $(\bar B\,\Delta\,C)\cap(A\cup B)$.
17. $\overline{A\,\Delta\,B}\setminus C$.
18. $\overline{A\,\Delta\,B}\cup(C\setminus A)$.

Задание 21. Представьте заштрихованные области диаграммы Эйлера-Венна максимально компактным аналитическим выражением, в котором используется минимальное количество операций и букв.

1.		2.		3.	
4.		5.		6.	



Задание 22. Даны множества А (треугольник), В (квадрат) и С (круг). Определить через операции объединения, пересечения, дополнения, разности и симметрической разности, чему равна заштрихованная область в указанных четырех случаях а), б), в) и г).



Задание 23. Построить диаграмму Венна для следующих множеств: $A = \{1, 5, 7\}$; $B = \{1, 2, 3, 7, 9\}$; $C = \{0, 6, 7, 9\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Задание 24. Построить диаграмму Венна для множеств: $A = \{0, 4, 9\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; $C = \{0, 5, 6, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Задание 25. Построить диаграмму Венна для множеств: $A = \{3, 6, 7\}$; $C = \{7, 8, 9\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Задание 26. Найти пересечение $A \cap B$, объединение $B \cup A$, разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если множества A и B задаются следующим образом: $A = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \geq 16\}$, $B = \{(x, y) | x + y \geq 2\}$

Задание 27. Найти пересечение $A \cap B$, объединение $B \cup A$, разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если множества A и B задаются следующим образом: $A = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 9\}$, $B = \{(x, y) | x + y \geq 2\}$

Задание 28. Если $A \subset B$, то что такое $A \cup B$? Что такое $A \cap B$? Что такое $A \setminus B$? Что такое $B \setminus A$?

Задание 29. Упростить $\overline{A \cup \bar{B}}$, $\overline{\overline{A \cup \bar{\bar{B}}} \cup \bar{A}}$, $\overline{\left(\bar{A} \cap \overline{\bar{A} \cup C}\right)} \cap \bar{D}$.

Задание 30. Упростить выражения

$а)\ \bar{A} \cap B \cap C \cup \bar{A} \cap B;$

$б)\ A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{C};$

$в)\ A \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap D;$

$г)\ B \cap (\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap B);$

$д)\ (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup \bar{B} \cup D);$

$е)\ (\bar{A} \cup B) \cap B \cap (B \cup \bar{C});$

$ж)\ A \cap B \cap C \cup \bar{A} \cap C \cap \bar{D} \cup A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cap D.$

Задание 31. Равны ли следующие выражения (I – универсальное множество):

$а)\quad A \cup \overline{B \cap C} \quad и \quad A \cup \bar{B} \cup \bar{C};$

$б)\quad \overline{\overline{\overline{A \cup I}} \cup I} \quad и \quad \overline{\bar{A} \cup \varnothing};$

$в)\quad \overline{\overline{\overline{A \cup A}} \cup \overline{\overline{A \cup A}}} \quad и \quad A;$

$г)\quad \overline{A \cap \varnothing} \cup \overline{B \cap I} \quad и \quad \bar{I};$

$д)\quad \overline{\overline{A \cap \bar{\bar{A}}} \cap \overline{\bar{\bar{B}} \cap B}} \quad и \quad I.$

Задание 32. Расставьте знаки $=$ или $\neq$ вместо ….

1. $(A \cap B \cup C) \cap \left(\overline{(A \cap B)} \cup C\right) \ldots .\ C$
2. 2. $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \ldots .\ \overline{\left((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})\right)}$

Задание 33. Упростить выражение $A \cap \bar{B} \cap C \cup (\bar{A} \cup B) \cap C \cup C \cap \bar{C}$

Задание 34. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество и проверить его с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

1. $(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$ **2.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **3.** $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$ **4.** $A\backslash(A \cap B) = \bar{B}\backslash\bar{A}$ **5.** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ **6.** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ **7.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ **8.** $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ **9.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ **10.** $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	**11.** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ **12.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ **13.** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = A \cup B$ **14.** $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B)\backslash C$ **15.** $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ **16.** $(A \cap B) \cup (C \cap D)=(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$ **17.** $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})=A$ **18.** $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)=(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ **19.** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ **20.** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
Задание 35. Упростите выражения $A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}$; $A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$; $\bar{A} \cap B \cup \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap \bar{B}$; $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{A} \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap D \cup \bar{A} \cap B \cap C \cap D$; $A \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B$.	**Задание 36 .** Упростите выражения, если $C = I$, $D = \emptyset$ $(A \cup B) \cap (C \cup D)$. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cup B \cap C \cap D$. $(\bar{A} \cup B \cup C) \cap (C \cup D)$. $A \cap C \cup \bar{B} \cap C \cup A \cap D$. $\bar{A} \cap (B \cup C \cup D) \cap B \cap C$. $(A \cup B \cup C) \cap (\bar{B} \cup D)$.
Задание 37. Упростите выражения, если $C \subset D$, $A \subset B$. $A \cap B \cap C \cap D$. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}$. $(A \cup B) \cap (C \cup D)$. $A \cap \bar{B} \cup C \cap \bar{D}$. $\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup D}$. $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup C \cup D)$.	**Задание 38.** Чему равны выражения, если принять $B = C = \emptyset$? $A \cup B \cup C \cup D$. $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}$. $\bar{A} \cup B \cup D$. $B \cap C \cup A \cap \bar{D}$. $(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{C} \cup D)$. $(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup C)$.

Задание 39. Используя определения операций над множествами, доказать данное тождество теории множеств. Проиллюстрировать доказательство с помощью диаграмм Венна.

1) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A}$;
2) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap (\overline{\mathbf{A}} \cup \mathbf{B})$;
3) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$;
4) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \setminus \overline{\mathbf{B}}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$;
5) $(\mathbf{A} \setminus \overline{\mathbf{B}}) \cup (\overline{\mathbf{A}} \setminus \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cup \overline{\mathbf{A}}) \cap (\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{B}})$;
6) $\mathbf{A} \setminus (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$;
7) $\mathbf{B} \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$;

Задание 40. Упростить выражения

1. $\overline{A \cup \bar{B}}$ 2. $\overline{\overline{A \cup \bar{B} \cup \bar{A}}}$ 3. $\overline{\bar{A} \cap \overline{(\bar{A} \cup C)} \cap \bar{D}}$	4. $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{A \cup B}$ 5. $\overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})}$ 6. $(A\backslash B) \cup (A \cap B)$ 7. $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{A \cup B}$	8. $((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)) \cap B$ 9. $((\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) \cap A$ 10. $A \cup \overline{\overline{\bar{A} \cup B} \cup \overline{\bar{B} \cup A} \cap B}$ 11. $\overline{(B\backslash C \cap \bar{B})\overline{A \cap \bar{C}}\backslash(\bar{A} \cap B \cup (B \cap C\backslash\bar{A} \cap C))}$